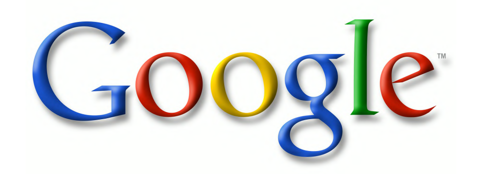

Google

VORLESUNGEN
ÜBER
INGENIEUR-WISSENSCHAFTEN
I. TEIL:

STATIK UND FESTIGKEITSLEHRE

DRITTER BAND I. HÄLFTE


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS





STATIK UND FESTIGKEITSLEHRE

DRITTER BAND

ERSTE HÄLFTE



VORLESUNGEN

ÜBER

INGENIEUR-WISSENSCHAFTEN

VON

GEORG CHRISTOPH MEHRTENS

GEH. HOFRAT UND PROFESSOR DER INGENIEUR-WISSENSCHAFTEN
AN DER KÖNIGLICHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN DRESDEN

ERSTER TEIL

STATIK UND FESTIGKEITSLEHRE

DRITTER BAND

ERSTE HÄLFTE

GEWÖLBE UND STÜTZMAUERN

MIT 116 ZUM TEIL FARBIGEN FIGUREN

ZWEITE UMGEARBEITETE UND STARK VERMEHRTE AUFLAGE



LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1912

VORWORT

zur zweiten Auflage des dritten Bandes erste Hälfte.

Nach dem Vorwort zur zweiten Auflage des zweiten Bandes wurde die Theorie der Gewölbe und des Erddruckes für den dritten Band zurückgestellt, und dafür der Abschnitt: »Formänderungen der Fachwerke und Vollwandträger«, der bis dahin einen Teil des dritten Bandes gebildet hat, bereits in den zweiten Band aufgenommen. Dadurch wurde es möglich, im zweiten Bande alles dasjenige zu vereinigen, was zur Berechnung der äußeren und inneren Kräfte, sowie der Formänderungen statisch bestimmter Träger, und deren Anwendung für die Berechnung statisch unbestimmter Systeme von Bedeutung ist. Danach verbleiben für die zweite Auflage des dritten Bandes die Gewölbe und Stützmauern und die statisch unbestimmten Träger.

In der vorliegenden ersten Hälfte des dritten Bandes bringen die Nummern **1** bis **6** des § 1 — in erweiterter Gestalt — mein neues Verfahren zur Berechnung des beiderseits eingespannten Tonnengewölbes als Dreigelenkträger, wobei auf die §§ 6 und 7 des zweiten Bandes* Bezug genommen wird. Daran schließen sich in den Nummern **7** und **8** Zahlenbeispiele und geschichtliche Rückblicke auf die älteren Gewölbetheorien bis auf COULOMB und PONCELET und die Anfänge der Elastizitätstheorie.

Die §§ 2 bis 4 behandeln den Erddruck. § 2 enthält eine Übersicht der Geschichte der Erddrucktheorie, unter Behandlung der offenen Fragen, wie Richtung des Erddruckes, Gestalt der Gleitfläche und Grenzen der Anwendbarkeit der Theorie von COULOMB. Im § 3 — bei der graphischen Erddrucktheorie — sind neu die Nummern **17**d, **19**a und **21**, worin die zwischen zwei Wänden eingeschlossene Erde, die vorkommenden Arten der Überlasten und die Einflüsse einer wandernden Einzellast auf die Erddruckgröße untersucht werden. § 4 ist durchaus neu und gibt das Wesentliche der Theorie des Erddruckes im unbegrenzten Erdreiche (nach Mohr) sowie auch deren Anwendungen. Der Anhang § 5 hat in den Nummern **33**, **34** und **36** mancherlei Bereicherungen erfahren.

---

* Diese Paragraphen behandeln den Vollwandbogen im allgemeinen und den Dreigelenkbogen.

Herrn Regierungsbaumeister Abele, meinem Assistenten, danke ich an dieser Stelle nochmals für seine unermüdliche, wertvolle Unterstützung beim Nachprüfen der Berechnungen und Zeichnungen und dem Lesen der Korrekturen.

Der Verlagshandlung von Wilhelm Engelmann sage ich wiederholt meinen besten Dank für ihr umsichtiges Walten beim Drucklegen und für die vortreffliche Ausstattung des Bandes.

Die 2. Hälfte der 2. Auflage des 3. Bandes wird im Herbst dieses Jahres erscheinen.

Dresden-A., den 25. Januar 1912.

Mehrtens.

INHALT.

Nr. Seite

Vorwort . . . . . V—VI

Erster Abschnitt. Gewölbe.

§ 1. Berechnung des beiderseits eingespannten Tonnengewölbes als Dreigelenkträger.

1. Die Grundlagen der Elastizitätstheorie 1
   a. Der normale Berechnungszustand eines Gewölbes 1
   b. Die Wahrscheinlichkeit des normalen Berechnungszustandes 2
   c. Die drei Grundbedingungen des Gleichgewichtes 3
   d. Die wirkliche Lage der Mittelkraftlinie im Gewölbe 6
2. Näherungsberechnungen im allgemeinen 8
   a. Festlegen der günstigsten Bogenachse 8
   b. Wahl einer geeigneten Mittelkraftlinie für die Verkehrslast 9
3. Vorläufige Berechnung der Bogenstärken 11
   a. Näherungsformeln 11
   b. Wahl der zulässigen Spannung 14
4. Grenzlagen der Mittelkraftlinie im Gewölbe 15
   a. Linien der kleinsten und größten Bogenkraft 16
   b. Grenzlagen beim Gewölbeeinsturz 18
5. Widerlager und Pfeiler im Zusammenhang mit dem Gewölbe 20
   a. Standwiderlager und verlorene Widerlager 20
   b. Tätige und ruhende Bogenkraft beim Kanten von Widerlagern und Pfeilern . . 21
6. Die Berechnung der Randspannungen 25
   a. Die Fugenspannungen 25
   b. Der Bodendruck 26
   c. Temperatureinflüsse 28
7. Zahlenbeispiele 31
   a. Feststellen der Gestalt und Stärke des Bogens 31
   b. Berechnung von Fugen- und Bogendrücken 36
   c. Berechnung von Temperaturspannungen 37
   d. Das Nachprüfen der günstigsten Bogenachse durch Einflußlinien 40
8. Geschichtliche Rückblicke 44
   a. Die älteren Theorien bis auf Coulomb 44
   b. Coulomb und seine Nachfolger 45
   c. Die graphische Behandlung durch Poncelet 47
   d. Moseley — Scheffler — Schwedler — Hagen 48
   e. Die Anfänge der Elastizitätstheorie 52

Zweiter Abschnitt. Stützmauern.

§ 2. Einführung in die Theorie des Erddruckes.

Nr. Seite

9. Die älteren Anschauungen bis auf Coulomb . . . 55
a. Der Winkel der natürlichen Böschung . . . 55
b. Das Erddruckprisma und die Richtung des Erddruckes . . . 56
c. Der Gegendruck einer Gleitfläche . . . 58
10. Die Theorie von Coulomb . . . 58
a. Voraussetzungen und Ergebnisse . . . 59
b. Die Bedeutung der Ergebnisse von Coulomb . . . 60
11. Die Erddrucktheorien des 19. Jahrhunderts . . . 61
a. Coulombs Nachfolger bis auf Poncelet . . . 61
b. Erweiterungen der von Coulomb und Poncelet geschaffenen Grundlagen . . . 62
12. Die Richtung des Erddruckes . . . 63
a. Bedenken gegen die Annahme von Coulomb . . . 63
b. Der tätige Erddruck . . . 64
c. Der ruhende Erddruck . . . 64
13. Die Lage der Gleitfläche und die Größe des Erddruckes . . . 65
a. Die wahre Gestalt der Gleitfläche . . . 65
b. Darstellung der Lage einer ebenen Gleitfläche . . . 67
c. Darstellung der Größe des Erddruckes . . . 69
14. Theorie des Erddruckes im unbegrenzten Erdreiche . . . 70
a. Die Lage der Gleitflächen . . . 70
b. Anwendbarkeit der Theorie auf die Berechnung von Stützmauern . . . 72

§ 3. Graphische Berechnung der Stützmauern.

15. Einleitende Bemerkungen . . . 73
a. Bedingung der Standsicherheit . . . 73
b. Die physikalische Natur der Hinterfüllung und des Untergrundes . . . 75
16. Ebene Wand und beliebige Erdlinie . . . 77
a. Die Stellungslinie . . . 77
b. Lage der Gleitfläche und Größe des Erddruckes . . . 78
17. Grundfall der ebenen Wand und geraden Erdlinie . . . 79
a. Die Gleitfläche . . . 79
b. Die Erdlinie ist der Böschungslinie parallel . . . 81
c. Größe des ruhenden Erddruckes . . . 82
d. Die Erde ist zwischen zwei Wänden eingeschlossen . . . 82
18. Ebene Wand und gebrochene Erdlinie . . . 83
a. Gleitfläche und Druckdreieck . . . 83
b. Erstes Beispiel . . . 83
c. Zweites Beispiel . . . 85
19. Gleichmäßig verteilte Überlasten auf der geraden Erdlinie . . . 85
a. Die vorkommenden Arten der Überlasten . . . 85
b. Gleitfläche und Druckdreieck . . . 86
1. Ersatz einer Teilbelastung durch eine gleichmäßige Erdlinie . . . 86
2. Ersatz des Überlastprismas einer Teilbelastung durch ein gleichwertiges Dreieck 88
c. Vollbelastung . . . 91
20. Gleitfläche für einen beliebigen Punkt der Erdlinie . . . 92

Nr. Seite

21. Überlast einer lotrechten Einzelkraft bei ebener Wand und ebener Erdlinie 95
a. Einflüsse einer wandernden Einzellast auf die Erddruckgröße 95
b. Die Einflußfläche des Erddruckes für eine Erdüberlast 97

22. Die Gleitflächen für den Angriffspunkt einer Einzellast 98
a. Darstellung mit Hilfe einer gleichwertigen Erdlinie 98
b. Beispiel 99
c. Die Einzellast liegt unmittelbar neben der Mauerkrone 100

23. Erddruck auf gebrochene und krumme Wandflächen 101
a. Gerade Erdlinie ohne Überlast 101
b. Überlast einer lotrechten Einzelkraft 104

24. Der Angriffspunkt des Erddruckes 106
a. Ebene Wand und gerade Erdlinie 106
b. Ebene Wand und gerade Erdlinie bei gleichmäßig verteilter Überlast 108
c. Gebrochene Wand und gerade Erdlinie 108

25. Schlußbetrachtungen 110
a. Fugenspannungen und Bodendruck 110
b. Vergleichende Betrachtung verschiedener Mauerquerschnitte 111
c. Verankerungen von Stützmauern 112
d. Analytische Ausdrücke für die Größe des Erddruckes in einfachen Baufällen . . 112

26. Zahlenbeispiele 113
a. Gebrochene Wand ohne Überlast 113
b. Gebrochene Wand mit Überlast 116

§ 4. Die Theorie des Erddruckes nach Mohr.

27. Einleitung 122
a. Allgemeines und Geschichtliches 122
b. Voraussetzungen der Theorie 122

28. Die Spannungen im Erdkörper 123
a. Die Spannungen in einem Körperpunkte 123
b. Der Festpunkt eines Hauptkreises 124

29. Graphische Darstellung des Spannungszustandes im Punkte m 125
a. Der Festpunkt 125
b. Der Hauptkreis 126

30. Darstellung der Grenzzustände im Körperpunkte m 126
a. Der kleine Hauptkreis 126
b. Der große Hauptkreis 127
c. Die Gleitflächen 127

31. Bestimmung der Spannungsgrößen der Grenzzustände 128
a. Für die geneigte Erdoberfläche 128
b. Sonderfälle 128

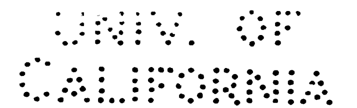
32. Anwendung der Theorie nach Mohr 129
a. Veranschaulichung der Hauptrichtungen der Normaldrücke durch Flüssigkeitssäulen 129
b. Schwierigkeiten bei Anwendung der Theorie zur Berechnung von Stützmauern . 130
c. Beispiel für eine ebene Stützmauerwand 131
d. Beispiel einer angenäherten Bestimmung von E bei Unterbrechung der Hauptrichtung durch die Wandfläche 133
e. Berücksichtigung der Schubfestigkeit des Erdreiches 134

Dritter Abschnitt.

§ 5. Anhang.

Nr. Seite

33. Eigengewichte und veränderliche Belastungen gewölbter Steinbrücken 136
a. Eigengewichte . . . 136
b. Verkehrslasten für Eisenbahnen . . . 137
1. Haupteisenbahnen . . . 137
2. Nebeneisenbahnen . . . 137
3. Belastungsgleichwerte für Steinbrücken . . . 138
c. Wagenlasten für Straßenbrücken . . . 138
1. Walzen . . . 138
2. Einfache Fuhrwerke . . . 138
3. Wettbewerb für die Kölner Rheinstraßenbrücke . . . 138
4. Kesselwagen . . . 139
5. Belastungen durch Pferde-, Dampf- und elektrische Straßenbahnen . . . 139
d. Menschengedränge . . . 140
e. Winddruck und Temperatureinflüsse . . . 140
1. Winddruck . . . 140
2. Temperaturgrade . . . 140
34. Grundmaße bestehender gewölbter Brücken . . . 141
a. Baustoff, Abmessungen und Fugendrücke . . . 141
b. Erfahrungswerte für die Scheitelstärke d_c . . . 143
c. Zulässige Druckspannungen in Scheitel- und Kämpfergelenken aus Stein und Eisen 144
35. Abmessungen von einfachen Stützmauern . . . 144
36. Größe des Erddruckes bei verschiedenen Hinterfüllungsarten und lotrechter Wandlinie . . . 145
37. Abmessungen von Ufermauern . . . 146



Erster Abschnitt.

Gewölbe.

---

§ 1. Berechnung des beiderseits eingespannten Tonnengewölbes als Dreigelenkträger.

Jede Einspannung (I. **14**) zählt gleich drei Stützenstäben. Eine beiderseits eingespannte Bogenscheibe ist also ein dreifach statisch unbestimmtes System, dessen Berechnung ohne die Ermittelung von *elastischen* Formänderungen nicht möglich ist. Die Berechnung ist auch eine sehr umständliche, so daß es zu verstehen ist, warum man die Spannungen in gelenklosen Gewölben heute oft angenähert *auf statisch bestimmtem Wege* ermittelt. Ehe die verschiedenen hierbei gebräuchlichen Verfahren besprochen werden, ist die Zulässigkeit und der Nutzen solcher Näherungsrechnungen gegenüber den genaueren, auf der Elastizitätstheorie fußenden Rechnungen, nachzuweisen.

1. Die Grundlagen der Elastizitätstheorie.

a. Der normale Berechnungszustand eines Gewölbes. Die Theorie der Gewölbe kann ohne vorherige Betrachtung der die *Herstellung des Bogens* begleitenden Umstände kaum verständlich genug vorgetragen werden. Das Wölben eines Bogens beginnt in der Regel möglichst gleichzeitig und gleichmäßig von seinen Widerlagern (den Kämpferfugen) aus. Gewölbe aus natürlichen oder künstlichen Steinen werden dabei gewöhnlich in voller Bogenstärke bis zum Scheitel aufgemauert, wo der sog. *Schluß* stattfindet. Die aus einer gleichmäßigen Masse hergestellten *Beton*gewölbe sind erst möglich geworden, nachdem an Stelle des althergebrachten Bindemittels des *Kalk*mörtels der *Zement*mörtel getreten ist. Mit Hilfe des Zementes lassen sich selbst aus rauhen, unbearbeiteten kleinen Bruchsteinen elastisch gleichmäßig widerstehende Gewölbe herstellen.

Das wichtigste Hilfsmittel bei der Herstellung eines Gewölbes ist das *Lehrgerüst*. Es erhielt den Namen von einer seiner Aufgaben, wonach es eine *Lehre* für die genaue Herstellung der innern Wölblinie bilden soll. Daneben hat das Lehrgerüst zwei andere Aufgaben zu erfüllen:

1) die Last des noch nicht geschlossenen Bogens aufzunehmen,
2) nach erfolgtem Bogenschlusse das sog. *Ausrüsten* (Ausschalen) des Gewölbes zu ermöglichen, so daß dieses seine Last allmählich und sicher auf die Widerlager übertragen kann.

Das Endziel der Gewölbeherstellung geht nun dahin, den Bogen, nach erfolgtem Schlusse und beendigtem Ausrüsten, in derjenigen Gestalt zu erhalten, die der für die Ausführung bestimmte Entwurf zeigte. Das kann aber niemals vollkommen erreicht werden, weil die Schwierigkeiten der Gewölbeherstellung und die unvermeidlichen, im voraus nicht genau zu berechnenden *elastischen* Veränderungen seines Gefüges dies verhindern, und zwar sowohl während der Wölbung als auch nach erfolgtem Ausrüsten. Weil außerdem die Schwierigkeiten mit der Spannweite des Bogens wachsen, so gilt heute die sichere Herstellung eines Gewölbes von großer Weite (etwa 50 m und darüber) immer noch als ein Meisterstück der Ingenieurkunst. Jedenfalls erfordert heute der Bau einer bedeutenden gewölbten Brücke vergleichsweise mehr Umsicht und umfassendere technische Einzelkenntnisse als der Bau einer gleich weit gespannten eisernen Brücke.

Unter der allmählich bis zum Bogenschlusse fortschreitenden veränderlichen Belastung ist sowohl ein *Setzen* des Lehrgerüstes als auch ein *elastisches* Zusammendrücken zu erwarten. Dies allein verursacht in der *geplanten Gestalt der innern Wölblinie Veränderungen*, obschon deren Größe durch besondere Gegenmittel — Überhöhung des Lehrgerüstes und seine vorherige künstliche Belastung — beschränkt werden kann. Weitere elastische Formänderungen vollziehen sich während des Ausrüstens, und auch später noch, als eine Folge der elastischen Eigenschaften von Mörtel und Stein, sowie namentlich auch des erst allmählich völligen Hartwerdens der Mörtelmassen.

Dauernde Schwankungen der Wärmegrade der das Gewölbe umgebenden Luft kommen ebenfalls in Betracht, besonders aber noch der Umstand, daß es praktisch unmöglich ist, das Gewölbe bei derjenigen mittlern Lufttemperatur (I. **8**, b, S. 18) zu schließen, die für seine im Entwurfe vorgesehene Gestalt maßgebend war. Je nachdem also der Gewölbeschluß bei höherer oder niedrigerer Luftwärme erfolgt, als es die bei der Berechnung angenommene mittlere Gradzahl verlangt, wird der Scheitel der innern Wölblinie im Augenblicke des Schlusses höher oder tiefer zu liegen kommen, als es geplant war.

Endlich ist noch zu bedenken, daß auch die Steinmassen von Widerlagern und von Zwischenpfeilern elastisch sind und infolge dieser Eigenschaft auf die Bogengestalt formändernd zurückwirken. So läßt sich schließen, daß die wirkliche Bogengestalt immer von der bei der Berechnung zugrunde gelegten Gestalt mehr oder minder abweichen wird. Die Ursachen dieser Abweichungen, die nach dem Vorgange WINKLERS (**8**, c) die Bezeichnung »*Störungen*« erhalten haben, werden bei der Berechnung des Gewölbes nur insofern beachtet, als man je nach ihrer Bedeutung den *Sicherheitsgrad* des Tragwerkes festsetzt (I. **7** und **12**). Danach berechnet man ein Gewölbe in seinem sog. *normalen Zustande, wobei man, bei unveränderlicher Luftwärme, alle Fugen völlig geschlossen und spannungslos und die Widerlager, sowie Pfeiler als unwandelbar fest (starr, vollkommen unelastisch) voraussetzt.*

b. Die Wahrscheinlichkeit des normalen Berechnungszustandes. Wenn weiterhin von der *wahren* Mittelkraftlinie (I. **58**, **59**) eines Gewölbes gesprochen wird, so ist damit keineswegs die *wirkliche* Mittelkraftlinie gemeint. Eine solche gibt es überhaupt nicht: Von hundert Gewölben, die unter völlig gleichen

Bedingungen gebaut und belastet wären, würde jedes eine andere Mittelkraftlinie besitzen, weil die oben erwähnten »Störungen« bei allen Gewölben verschieden sind. Eine Mittelkraftlinie liegt auch niemals unveränderlich fest, sie ist vielmehr äußerst *lebendig*, und infolgedessen ändert sich auch stetig die Lage der Wölblinien. Schon ein chinesisches Sprichwort sagt deshalb: »Ein Gewölbe schläft niemals«[1]. Und was für Gewölbe gilt, hat auch für die weiterhin behandelten Stützmauern Geltung. Mohr sagt in der angegebenen Quelle wörtlich: »Solange der Mörtel im Mauerwerk nicht vollkommen erhärtet ist, finden langsame, *meist unelastische* Formänderungen und Bewegungen statt. Jede solche Bewegung hat eine Änderung der Spannungszustände zur Folge, und es ist ein Glück für den Ingenieur, daß diese Änderungen in der Regel nicht von schädlicher, sondern, im Gegenteil, vermöge ihrer Natur von nützlicher Beschaffenheit sind. Denn sie bestehen darin, daß der Mörtel den schärferen Spannungen ausweicht, wodurch eine Ausgleichung, *eine* gleichmäßigere Verteilung der inneren Kräfte herbeigeführt wird. Selbstverständlich werden diese Spannungsänderungen bedingt und begrenzt, einerseits durch die Gleichgewichtsbedingungen und anderseits durch die Bewegungsfähigkeit des Mörtels. Ein langsam bindender und langsam erhärtender Mörtel wirkt günstiger als ein rasch erhärtender, der unelastische Formänderungen erschwert und zu Bildung von Rissen und Sprüngen geneigt ist. Hierin liegt wohl der Grund, weshalb erfahrene Ingenieure den langsam erhärtenden Traßmörtel dem Zementmörtel vorziehen, wobei ferner noch in Betracht kommt, daß der Traßmörtel infolge der gleichmäßigeren Zusammenpressung eine größere Wasserdichtigkeit gewährt.«

Aus obigen Gründen darf man die Ergebnisse der Berechnungen, die auf Grund der Elastizitätslehre für den normalen Bauzustand angestellt werden, nicht überschätzen. *Gute Näherungsberechnungen* sind daher nicht von der Hand zu weisen. Auch lassen die geschilderten inneren Vorgänge erkennen, wie verfehlt es ist, den Ergebnissen von *Belastungsversuchen* mit Modellen, deren Baustoff den wirklichen Eigenschaften eines Mauerkörpers nicht völlig entspricht, zu großen praktischen Wert beizumessen.

c. Die drei Grundbedingungen des Gleichgewichtes. Ist der elastische Bogen mit einer starren Erdscheibe verbunden, so bleibt die Lage der Einspannungen an den Kämpfern während der unter den Belastungen entstehenden Formänderungen des Gewölbes *unverändert*, d. h. es kann weder eine Drehung der Kämpferfuge noch eine Verschiebung eines ihrer Punkte vor sich gehen. In Wirklichkeit sind die Widerlager oder Pfeiler, zwischen denen sich das Gewölbe spannt, allerdings elastisch, sie dürfen aber hier als starr angesehen werden, weil ihre verschwindend kleinen Bewegungen die Rechnungsergebnisse nur unerheblich beeinflussen.

Wie im I. Bande (unter **35**, S. 72) dargelegt worden ist, geht ein m-fach statisch unbestimmtes System durch Beseitigen von m Stäben in das sog. *statisch bestimmte Hauptsystem* über. Die an Stelle der m Stäbe anzubringenden, vorläufig noch

---

[1] Mohr, Der Spannungszustand einer Staumauer. Zeitschr. des Österr. Ing.- u. Arch.-Vereins. Nr. 40 und 41, 1908.

unbekannten Stabkräfte sind *die überzähligen Größen* (die *Überzähligen*). Im vorliegenden Falle ist die Unbestimmtheit eine *äußere*. Es sind daher drei (einer Einspannung gleichwertige) Stützenstäbe zu beseitigen (Fig. 1). Dadurch fällt die Einspannung einer der beiden Kämpfer, und um den gegebenen Belastungszustand wieder herzustellen, sind drei statisch nicht bestimmbare äußere Kräfte X, Y, Z anzubringen, deren Aufgabe es ist, die *vorhandene gegebene* Richtung kk der frei gemachten Kämpferfuge unverändert zu erhalten. Eine dieser äußern Kräfte muß daher ein Moment sein. Das sei X. Die beiden andern sind Einzelkräfte, die in der Trägerebene beliebig gelegt werden können. Anschaulich ist es, sich an die Kämpferfuge eine starre Scheibe S geschlossen zu denken, die durch die bezeichneten drei äußern Kräfte belastet ist (Fig. 1).

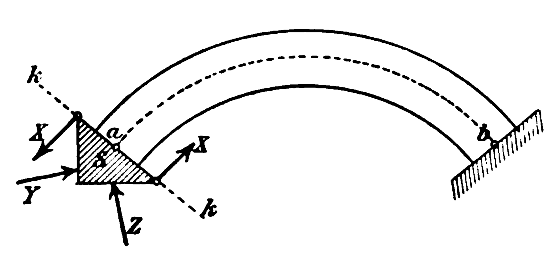


Fig. 1.

Die *Grundbedingungen* für die Elastizitätsberechnungen ergeben sich aus der Bestimmung der Lagenänderung, welche die freigemachte Kämpferfuge infolge des Angriffes der Überzähligen X, Y, Z ausführt. Die Lagenänderung ist durch drei Gleichungen bestimmt, von denen eine die Verdrehung der Kämpferfuge und die beiden andern je eine geradlinige Verschiebung beschreiben. Wie vorausgesetzt, soll aber die wirkliche Lage der Kämpferfuge des unbestimmten Systems unverändert erhalten bleiben. Setzt man also die für die drei Verschiebungen zu berechnenden

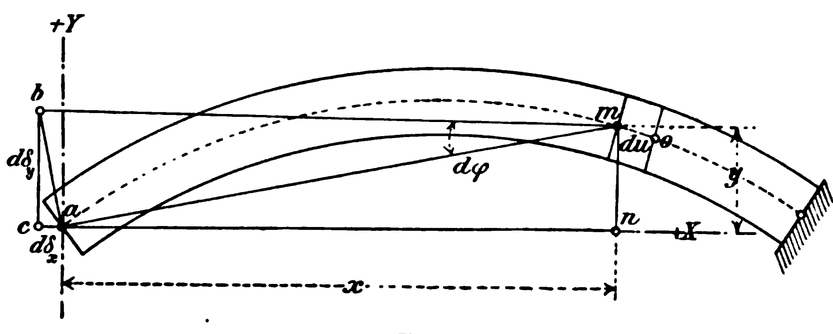


Fig. 2.

analytischen Ausdrücke je für sich gleich Null, so erhält man drei Bedingungsgleichungen, aus denen die Überzähligen ermittelt werden können. X, Y und Z sind dadurch nach Größe und Lage so bestimmt, daß sie im Hauptsystem die Lage der Kämpferfuge unverändert erhalten.

Um die drei Bedingungsgleichungen abzuleiten, betrachte man irgend zwei um du voneinander entfernte Nachbarquerschnitte des Bogens im Punkte m (Fig. 2), die sich unter der Wirkung des durch die Belastung hervorgerufenen Momentes M_m um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ gegeneinander verdrehen (**34**, im 2. Bande).

Infolge dieser Verdrehung (die in der Figur in unendlich großem Maßstabe gezeichnet worden ist) gelange der Kämpferpunkt a der Bogenachse nach b. Der unendlich kleine Bogenweg ab darf als Gerade angesehen werden. Betrachtet man ihn als Schrägseite eines rechtwinkligen Dreiecks abc, dessen Seiten $\overline{bc}$ und $\overline{ac}$ den durch a gelegten Achsen $+Y$ und $+X$ parallel laufen, so ist die Verschiebung des Punktes a durch dessen Seitenbewegungen

$$\overline{ac} = d\delta_x$$
$$\overline{bc} = d\delta_y$$
$$\overline{ab} = \overline{am} \cdot d\varphi$$

geometrisch bestimmt.

Die Achsenabstände des Punktes m seien x, y. Dann erhält man aus den ähnlichen Dreiecken abc und mna (Fig. 2) die Beziehungen

$$\frac{d\delta_x}{\overline{ma} \cdot d\varphi} = \frac{y}{\overline{ma}}; \quad \frac{d\delta_y}{\overline{ma} \cdot d\varphi} = \frac{x}{\overline{ma}}.$$

Daraus folgt

$$d\delta_x = y \cdot d\varphi$$
$$d\delta_y = x \cdot d\varphi .$$

Es erübrigt noch $d\varphi$ in Beziehung zum Momente M_m zu bringen. Nach I. **103**, b (S. 327) ist die Spannung

$$\sigma = v \frac{E}{\varrho},$$

wenn v den Abstand einer Faser der Nachbarquerschnitte von der Nullinie (hier die Bogenachse), E das Dehnungsmaß (I. **5**, b) und ϱ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie im Punkte m bedeuten (II. **35**). Ferner ist (nach I. Gl. 97) für den vorliegenden Fall (Symmetrie des Querschnittes) und wenn (nach II. **35**, b) der krumme Bogen bei m als ein gerader berechnet werden darf:

$$\sigma = \frac{M_m v}{J}.$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_m}{EJ} \tag{1}$$

und weil

$$du = \varrho\, d\varphi$$

erhält man

$$d\varphi = \frac{M_m}{EJ} du . \tag{2}$$

Setzt man den Wert von $d\varphi$ in obige Ausdrücke für dx und dy ein und *summiert* die drei in Frage stehenden Verschiebungen *für sämtliche Bogenquerschnitte*, so gelangt man schließlich zu den gesuchten Grundbedingungen der Elastizitätsberechnungen:

$$\begin{aligned} \int d\varphi &= \int \frac{M_m}{EJ} du &= 0 \\ \int d\delta_x &= \int \frac{M_m}{EJ} y\, du &= 0 \\ \int d\delta_y &= \int \frac{M_m}{EJ} x\, du &= 0 . \end{aligned} \tag{3}$$

Um hieraus die Überzähligen X, Y, Z berechnen zu können, braucht man noch eine Beziehung zwischen diesen und dem Momente M_m. Setzt man dann

$$M_m = f(X,\ Y,\ Z)$$

in obige drei Grundbedingungen ein, so erhält man dadurch die fehlenden *drei Elastizitätsgleichungen*, aus deren Verbindung mit den gegebenen drei Gleichgewichtsbedingungen der Ebene, die sechs unbekannten Stützenkräfte der beiden Einspannungen zu berechnen sind. Wie das im einzelnen zu geschehen hat, braucht hier nicht näher dargelegt zu werden. Für den vorliegenden Fall genügt es, aus den Gleichungen (3) *die Bedingungen für die Lage der Mittelkraftlinie im Gewölbe* herzuleiten.

d. Die wirkliche Lage der Mittelkraftlinie im Gewölbe.

1. Mittelkraftlinie und *Stützlinie* sind hier gleichbedeutend. Nach I. **64**, b ist die Mittelkraftlinie eine Stützlinie, deren Stützpunkte unendlich nahe nebeneinander liegen. Ich bevorzuge im allgemeinen die Benennung »Mittelkraftlinie«, weil sie deutlicher zum Ausdrucke bringt, um was es sich handelt.

Beschränkt man sich auf den Fall der lotrechten Belastung des Gewölbes, so läßt sich die Mittelkraftlinie für eine beliebige Stellung der Lasten zeichnen, sobald die Bogenkraft H, sowie auch Richtung und Größe *einer* Kämpferkraft gefunden worden sind (II. Fig. 135). Dann besteht zwischen der Bogenkraft H und dem Momente M_m (wie unter II. **36**, a bewiesen wurde) die Beziehung

$$M_m = Hv,$$

wenn v der lotrecht gemessene Abstand zwischen Mittelkraftlinie und Bogenachse ist. Im Produkte Hv kann v als Kraft oder als Länge aufgefaßt werden (I. **60**, b, S. 131). H ist unveränderlich. Die Grundgleichungen können danach mit

$$\int \frac{v\,du}{EJ} = 0; \quad \int \frac{vy \cdot du}{EJ} = 0; \quad \int \frac{vx \cdot du}{EJ} = 0 \tag{4}$$

angeschrieben werden. Die Integration hat sich über die Bogenachse ab (Fig. 2) zu erstrecken. Das Dehnungsmaß E ist in der Regel unveränderlich, so daß es in den Gleichungen (4) meist fortgelassen werden kann.

Sieht man v als Kraft an und bedenkt, daß du, E und J für jeden Querschnitt gegebene Festwerte bedeuten, so kann man den Ausdruck $v\,du/EJ$ als eine *elastische Kraft* auffassen, deren *Vorzeichen* allein von M_m abhängig ist und die im Punkte m angreift. Bezeichnet man diese veränderliche elastische Kraft mit w, setzt also

$$w = v\frac{du}{EJ}, \tag{5}$$

so erhält man aus den Gl. (4) die Bedingungen

$$\int w = 0; \quad \int w \cdot x = 0; \quad \int w \cdot y = 0. \tag{6}$$

Denkt man sich ferner die elastischen Kräfte w wagerecht angreifend, so stellen die letzten drei Summen eine Gleichgewichtsgruppe von Kräften dar, denn jede der Summen erfüllt eine der Gleichgewichtsbedingungen: die Summe aller

w in der Richtung einer *Z*-Achse ist Null; desgleichen ist die Summe der statischen Momente der *w* in bezug auf die *Y*-Achse und auf die *X*-Achse je für sich gleich Null. Es fragt sich jetzt, *bei welcher Lage der Mittelkraftlinie diese Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden.*

Die Bedingungen sind erfüllt, wenn alle *w* für sich Null sind, d. h. wenn $v = 0$, oder wenn die Mittelkraftlinie für die betrachtete Belastung mit der Bogenachse zusammenfällt. Das ist (nach II. **38**, S. 175) nur bei ständiger Belastung möglich. Bei veränderlicher Belastung muß jede Mittelkraftlinie die Bogenachse *schneiden*, denn das Integral aller *w* kann nur Null werden, wenn sowohl positive als auch negative *w* vorhanden sind, oder was dasselbe sagt, wenn sowohl positive als negative Momente im Bogen auftreten.

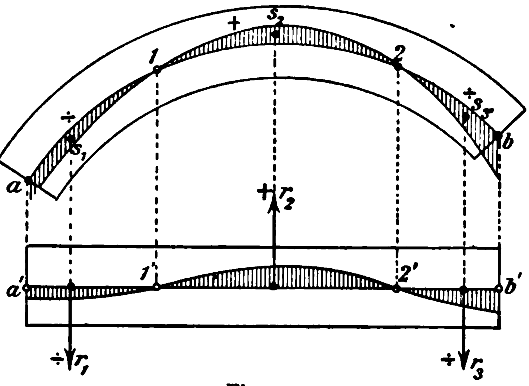


Fig. 3.

2. Es läßt sich nun folgender Satz beweisen:

Die Mittelkraftlinie muß die Bogenachse in mindestens drei Punkten, bei Symmetrie des Bogens und der Belastung in mindestens vier Punkten schneiden.

Angenommen, die Mittelkraftlinie schnitte nur in einem Punkte. Dann gäbe es eine positive und eine negative Gruppe der Kräfte *w*, von denen jede ihre Mittelkraft hat. Die beiden Mittelkräfte fielen aber nicht in eine und dieselbe Gerade, könnten also nicht im Gleichgewichte sein (I. **46**).

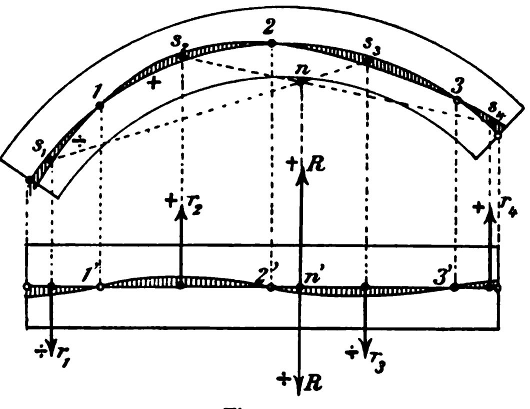


Fig. 4.

Sind nur zwei Schnittpunkte vorhanden (Fig. 3), so gibt es drei Gruppen der Kräfte *w*, von denen die eine eine positive, die beiden andern zusammen eine negative Mittelkraft haben, oder umgekehrt. Gleichgewicht könnte demnach nur eintreten, wenn die positive Mittelkraft r_2 in die Richtung der Mittelkraft $(r_1 + r_3)$ von *beiden* negativen Kräftegruppen fiele. Das ist aber unmöglich, weil — wie die Fig. 3 zeigt — die Mittelkraft der negativen nicht mit der Mittelkraft der positiven Kräfte in einer Ebene liegen kann. Wenn aber drei Schnittpunkte mit zwei positiven und zwei negativen Kräftegruppen vorhanden sind (Fig. 4), kann die Mittelkraft $(r_2 + r_4)$ der positiven gleich der Mittelkraft $(r_1 + r_3)$ der negativen

Kräfte sein und dabei der Angriffspunkt beider in eine Linie fallen. Wenn man nämlich, wie es in der Fig. 4 geschehen ist, die Schwerpunkte s_1 und s_3 der ersten und dritten w-Fläche, sowie auch die Schwerpunkte s_2 und s_4 der beiden andern w-Flächen im Aufriß je durch eine Gerade verbindet, so schneiden sich diese in einem Punkte n. Somit besteht immer die Möglichkeit, daß beide Mittelkräfte, einerseits $-(r_1 + r_3)$ und anderseits $+(r_2 + r_4)$, gleich groß sind und dabei durch diesen — im Grundriß der Fig. 4 — mit n' bezeichneten Punkt verlaufen. Damit ist der obige Satz von der Lage der Mittelkraftlinie bewiesen.

2. Näherungsrechnungen im allgemeinen.

a. Festlegen der günstigsten Bogenachse. Der aus der Elastizitätstheorie gewonnene Satz von der Lage der Mittelkraftlinie bestätigt, daß ebenso wie bei Dreigelenkträgern (II, § 7), es auch für gelenklose Gewölbe ratsam ist, die Bogenachse möglichst günstig zu krümmen. Als günstigste Bogenachse gilt auch hier diejenige, für welche alle Momente M_m, die aus dem Eigengewichte und der halben, über die ganze Stützweite gleichmäßig verteilten Verkehrslast herrühren, verschwinden. *Diese Art der Belastung soll von jetzt ab kurzweg die mittlere* genannt werden. Der heutige Gebrauch, die Bogenachse mit der allein aus Eigengewicht herrührenden Bogenkraft zu zeichnen, ist nicht empfehlenswert (II. 38).

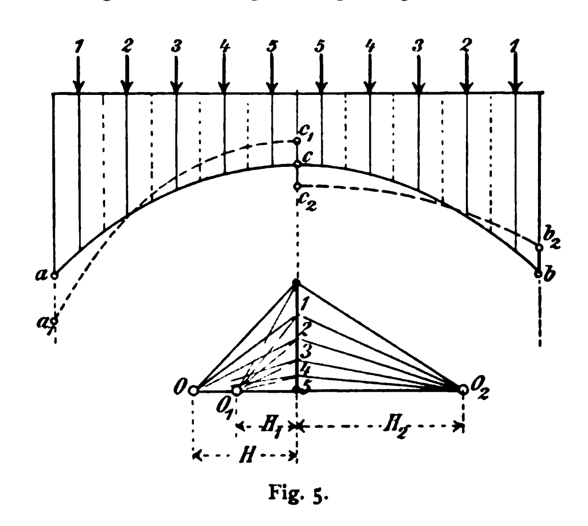


Fig. 5.

Für $M_m = 0$ werden die drei Grundbedingungen der Gl. (3) erfüllt, so daß die Mittelkraftlinie mit der günstigsten Bogenachse zusammenfällt. Man könnte meinen, dies brauche nicht der Fall zu sein, weil die Grundbedingungen auch für eine Mittelkraftlinie zu erfüllen wären, die mindestens drei- oder viermal die Bogenachse schnitte. Das ist aber unmöglich, denn in einem gegebenen Falle könnte die aus der Elastizitätstheorie hergeleitete Mittelkraftlinie entweder nur eine kleinere oder eine größere Bogenkraft geben, als diejenige, für welche die günstigste Bogenachse acb (Fig. 5) gezeichnet ist. Keine dieser beiden Mittelkraftlinien (a_1c_1 und b_2c_2) könnte aber so verschoben werden, daß dadurch ein mindestens viermaliges (oder dreimaliges) Schneiden der Bogenachse acb entstände. Höchstens würde ein zweimaliges Schneiden zu erreichen sein. Die Grundbedingungen (Gl. 3) lassen sich demnach nicht anders erfüllen, als durch Nullsetzen jeder der drei Bedingungsgleichungen. Mit andern Worten: *Die wahre Mittelkraftlinie muß mit der günstigsten Bogenachse in allen Punkten zusammenfallen.* Um die Bogenachse festzustellen, müssen die Bogenstärken im Scheitel und an den Kämpferpunkten vorläufig annähernd berechnet werden. Dabei ist die Lage

dieser Bogenpunkte für die *innere Wölblinie* durch die Örtlichkeit des Baues als gegeben anzusehen. Die Einzelheiten der Berechnung folgen unter **7**.

Nach obigem wird also immer eine für die mittlere Belastung gezeichnete Bogenachse als vorhanden vorausgesetzt. Deren Achsenkräfte sind (nach II. **36** c) gegeben. Es bleibt also nur noch zu überlegen, *welche Mittelkraftlinie bei der Berechnung des Einflusses der Verkehrslast gelten soll.*

b. Wahl einer geeigneten Mittelkraftlinie für die Verkehrslast. Die nur mit Hilfe der Elastizitätstheorie zu ermittelnde wirkliche Lage der Mittelkraftlinie kommt hier nicht in Betracht. Es ist auch schwer möglich, durch Ausprobieren *nach dem Augenmaß* für einzelne Belastungsfälle Seillinien zu zeichnen, deren Lage den Elastizitätsbedingungen annähernd entspricht, weil ja die *Anzahl* ihrer Kreuzungen mit der Bogenachse vorher nicht bekannt ist. Bisher wurde nur festgestellt, daß die wahre Mittelkraftlinie *mindestens* drei (oder vier) Mal kreuzen muß. Auch ist daraus noch zu folgern, daß die größten Biegungsspannungen im Gewölbe — von außergewöhnlichen Fällen abgesehen — um so kleiner ausfallen müssen, je öfter die Bogenachse von der Mittelkraftlinie geschnitten wird, bis beim Zusammenfallen beider alle Momente verschwinden. Die Kenntnis dieser eigentümlichen Lage der wahren Mittelkraftlinie genügt aber, *um darauf ein einfaches und sicheres Verfahren zur Bestimmung der Gewölbestärken zu begründen.*

Die dem Verfahren zugrunde liegende *Mittelkraftlinie für einseitige Verkehrslast* wird, wie beim Dreigelenkbogen, durch den Scheitel und die beiden Kämpferpunkte der Bogenachse geführt. Die Annahme einer solchen statisch bestimmten Linie empfiehlt sich besonders deshalb, weil sie im allgemeinen etwas größere Bogenstärken liefert, als die Elastizitätstheorie. Das ist in vielen Fällen durch vergleichende Rechnungen nachgewiesen worden. TOLKMITT[2] war der Erste, der die Berechnung gelenkloser Gewölbe auf eine derartige Grundlage gestellt und erfolgreich begründet hat: er bestimmt zuerst die günstigste Bogenachse für die mittlere Belastung. Dann zeichnet er für einseitige Vollbelastung, die zwischen den Kämpfer- und Scheitellotrechten liegt, die erwähnte Mittelkraftlinie durch den Scheitel und die Kämpferpunkte der gefundenen Bogenachse und macht den Bogen so stark, daß dessen *Kern*linien von der Mittelkraftlinie nicht geschnitten werden.

Die von TOLKMITT danach der Berechnung zugrunde gelegte einseitige Verkehrslast ist aber *nicht die gefährlichste.* Das ist im 2. Bande (unter **41**) mit Hilfe der Fig. 145 bewiesen worden. Ich halte es deshalb für folgerichtiger, *wenn die Mittelkraftlinie für diejenige einseitige Verkehrslast gezeichnet wird, die das größte Moment liefert.* Wie (unter II. **41**) gezeigt worden ist, muß dann die Verkehrslast über den Scheitel hinaus reichen, weil der gefährlichste Querschnitt in der Nähe der Mitte jedes der beiden Bogenschenkel liegt. Auch ist es in jedem Falle möglich, den für das Moment gefährlichsten Querschnitt unmittelbar

---

[2] TOLKMITT, Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. 1895. 2. Aufl. 1903.

und genau aufzufinden, ohne vorher die Mittelkraftlinie zu zeichnen. In dem weiterhin beschriebenen, und durch Zahlenbeispiele im einzelnen erläuterten Verfahren weiche ich also insofern von Tolkmitt ab, als ich die *Breite des Gewölbekerns nach derjenigen Mittelkraftlinie bemesse, die das größte Moment liefert* (Fig. 6). Dabei sind *Zug*spannungen entweder ganz auszuschließen, d. h. also die Mittelkraftlinie muß überall innerhalb der Kernlinien bleiben, oder solche werden bis zu einer gewissen Höhe zugelassen. Bei bedeutenden Gewölben verwendet man heute auf die Mörtelbereitung große Sorgfalt. Es wird dabei meistens nur bester Portlandzement benutzt, dem man bei zehnfacher Sicherheit recht *wohl eine Zugbeanspruchung bis etwa* 2 atm. *zumuten darf.* Im eisenverstärkten Beton hat das Eisen die Zugspannungen voll aufzunehmen.

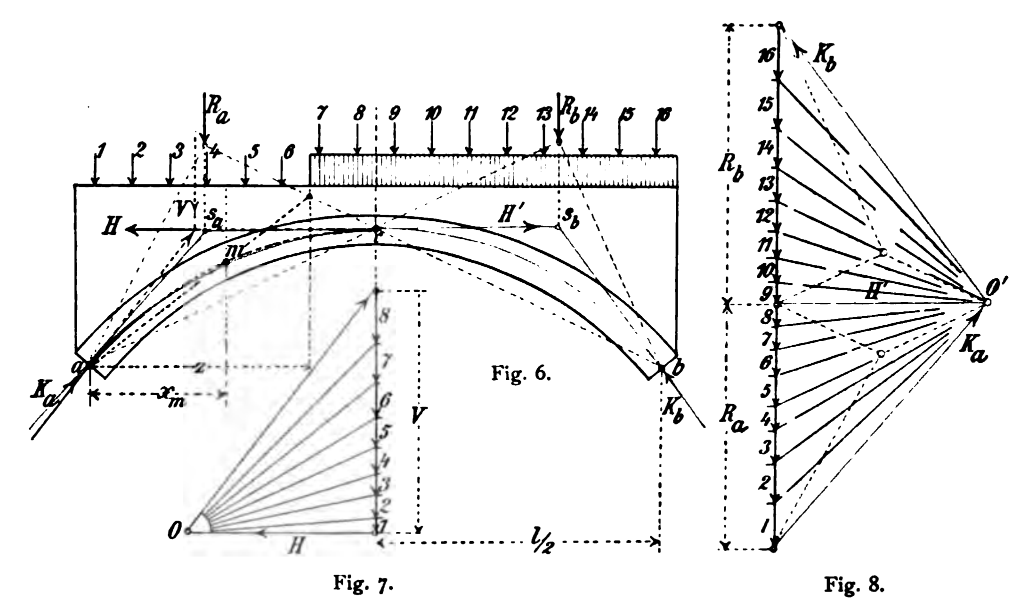


Fig. 6.

Fig. 7. Fig. 8.

In Fig. 6—8 ist in roten Linien angedeutet, wie man eine Mittelkraftlinie erhält, die durch die drei Punkte *a*, *b*, *c* verläuft (nach I. **59**), nachdem zuvor die günstigste Bogenachse für die mittlere Belastung gefunden worden ist. Praktisch wird es zulässig sein, wenn man den gefährlichsten Querschnitt *m* bei $x_m = l/4$ annimmt. Genau ist x_m nach (II. **41**, b) zu berechnen. Das Krafteck der Fig. 7 diente zur Darstellung der Bogenachse *amc*. Das Krafteck der Fig. 8 gehört zur ungünstigsten Mittelkraftlinie, deren Abstand von *m* das größte Moment festlegt, so daß $+M$ und $-M$ gleich groß werden. Im übrigen erklären die Fig. 6—8 sich selbst. Die *gefährlichste Lastlage* findet sich aus der Lastscheide der Einflußfläche, wobei *z* (nach II. Gl. 91 und 92) zu berechnen ist (vgl. II. **42**).

Es liegt auf der Hand, daß die ungünstigste wahre Mittelkraftlinie an keiner Stelle weiter von der Bogenachse abstehen kann, als eine nach obigem gezeichnete statisch bestimmt geführte Linie. Deshalb wird es auch zulässig sein, die *Bogenquerschnitte im Scheitel und an den Kämpfern* allein aus den zugehörigen Achsen-

kräften H und K für Vollbelastung der ganzen Bogenweite zu berechnen. Es werden zwar in diesen Querschnitten in Wirklichkeit immer auch Momente entstehen, sie sind aber kleiner als das berechnete größte Moment für den (nach dem in Rede stehenden Annäherungsverfahren) gefährlichsten Querschnitt m (Fig. 6). Um also völlige Sicherheit zu haben, genügt es die Stärke dieses gefährlichsten Querschnittes zuerst festzulegen, um die Scheitel- und Kämpferstärken danach richtig bemessen zu können. Bezeichnet man die Mittelkraft in m mit R_m, so ist dabei am einfachsten das Verhältnis

$$H : R_m : K = d_c : d_m : d_a \tag{7}$$

zugrunde zu legen, wenn die auf der rechten Seite der Gleichung genannten Bogenstärken der Reihenfolge nach für den Scheitel c, den Querschnitt m und den Kämpfer a gelten. Werden die Bogenstärken derart bemessen, so ist ausreichende Sicherheit gegen das Eintreten unzuverlässiger Randspannungen vorhanden. In den meisten Fällen werden aber die vorläufig, behufs Festlegen der Bogenachse bereits angenähert berechneten Scheitel- und Kämpferstärken ausreichend sein. Sie sind deshalb beizubehalten, wenn nicht etwa nach Gl. (7) eine Vergrößerung notwendig erscheint.

3. Vorläufige Berechnung der Bogenstärken.

a. Näherungsformeln. Um die Bogenachse günstig festzulegen, müssen die Scheitel- und Kämpferstärken vorläufig ermittelt werden, einerlei ob man nach der Elastizitätstheorie oder statisch bestimmt vorgeht.

Der allgemeine Ausdruck für die Scheitelkraft oder Bogenkraft H einer beliebigen Seillinie für parallele stetige Lasten lautet (nach I. **65**, a, Gl. 34)

$$H = q \varrho \cos^3 \varphi\,. \tag{8}$$

Darin ist q die *volle* Last für die Einheit der Bogenweite, ϱ der Krümmungshalbmesser der Linie in einem beliebigen Punkte m, φ der Winkel, den ϱ mit der Lotrechten einschließt. H ist als Polweite des zur Seillinie gehörigen Kraftecks unveränderlich. Deshalb erhält man die Größe der Bogenkraft im Scheitel aus der Gleichung

$$H = q_0 \varrho_0\,,$$

worin q_0 und ϱ_0 sich auf den Scheitel beziehen, wo φ verschwindet.

Die unbekannte Bogenstärke im Scheitel sei d_c, die zulässige Spannung des Wölbsteinstoffes sei σ. Dann gilt für ein Bogenstück von 1 m Tiefe zur Bildebene die Bedingung

$$H = 1 \cdot d_c \sigma = q_0 \varrho_0\,. \tag{9}$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ_0 ist noch unbekannt. Es kommt also darauf an, ihn aus den gegebenen Stücken zu berechnen. Da nun in jedem Entwurfe zuerst die Gestalt der *inneren* Wölblinie angenommen werden muß, so kann man den Krümmungshalbmesser r im Scheitel der inneren Wölblinie als gegeben ansehen. Es käme also nur darauf an, das Verhältnis zwischen ϱ und r festzustellen.

In Fig. 9 seien X und X' zwei Abszissenachsen, von denen X die Bogenachse und X' die innere Wölblinie im Scheitel berührt. $a a'$ sei eine beliebige, senkrecht zur Bogenachse gelegte Fugenrichtung, die mit der Lotrechten den

Winkel φ bildet; a' sei ihr innerer Randpunkt, a ihr Achsenpunkt, so daß $\overline{aa'} = \frac{d_a}{2}$ wird. Dann lauten die Gleichungen der beiden in Vergleich zu ziehenden Krümmungshalbmesser für die Punkte a und a' der Koordinaten x, y und x', y'

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{d^2x}}; \quad \varrho' = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{(dx')^2}}. \tag{10}$$

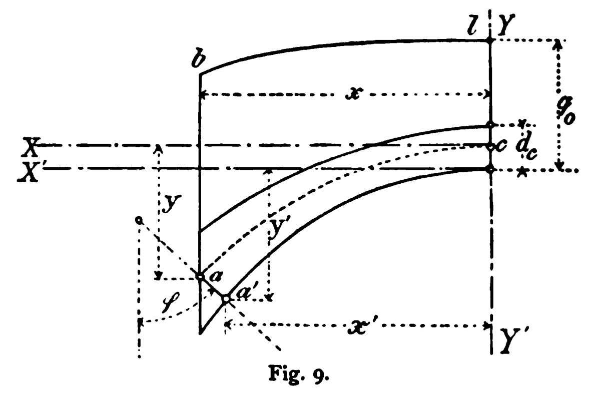


Fig. 9.

Fig. 10.

Wenn nun vorausgesetzt wird, daß 1) die Bogenachse mit der für die gegebene beliebige Belastungslinie bl gezeichneten Mittelkraftlinie zusammenfällt und 2) die Bogenstärke $d_a = 2 \cdot \overline{aa'}$ nach Maßgabe der Gl. (7) der Bedingung

$$d_a = \frac{d_c}{\cos\varphi}$$

entspricht (Fig. 10), so ist anzuschreiben:

$$y - \frac{d_c}{2} = y' - \frac{d_a \cos\varphi}{2}$$
$$= y' - \frac{d_c}{2}$$

oder

$$y' = y.$$

Ferner

$$x' = x - \frac{d_c \operatorname{tg}\varphi}{2}$$

oder

$$x' = x - \frac{d_c}{2}\frac{dy}{dx}.$$

Daraus erhält man durch Differentiieren:

$$dx' = dx - \frac{d_c}{2}\frac{dy^2}{dx}$$
$$dx' = dx\left(1 - \frac{d_c}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Für den Gewölbescheitel verschwindet $\frac{dy}{dx}$, ϱ geht in ϱ_0 und ϱ' in r über. Das gibt

$$\varrho_0 = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \quad r = \frac{1}{\frac{d^2y'}{(dx')^2}}. \tag{11}$$

Es ist aber

$$d^2 y' = d^2 y$$

und

$$(dx')^2 = dx^2 \left(1 - \frac{d_c}{2\varrho_0}\right)^2.$$

Dies mit den Gl. (11) verbunden gibt

$$d^2 y = \frac{dx^2}{\varrho_0} \quad \text{und} \quad d^2 y = \frac{(dx')^2}{r}$$

oder

$$r = \varrho_0 \left(1 - \frac{d_c}{2\varrho_0}\right)^2.$$

Weil $\left(\frac{d_c}{2\varrho_0}\right)^2$ ein sehr kleiner echter Bruch ist, so darf man schließlich anschreiben

$$r = \varrho_0 - d_c$$

oder

$$\varrho_0 = r + d_c.$$

In Verbindung mit der Gl. (9) erhält man jetzt

$$1 \cdot d_c \cdot \sigma = q_0 (r + d_c)$$

und daraus folgt schließlich die Näherungsformel für die Scheitelstärke:

$$d_c = \frac{q_0 r}{\sigma - q_0}. \tag{12}$$

Um die Formel für den praktischen Gebrauch bequem herzurichten, kann man (wie im 2. Bande unter **39** bereits an einem Beispiele durchgeführt wurde) die *innere* Wölblinie vorläufig *als Parabel* annehmen. Deren Krümmungshalbmesser im Scheitel ist gleich ihrem Parameter. Setzt man

$$r = \frac{l_0^2}{8 f_0},$$

worin l_0 die *Licht*weite und f_0 der dazu gehörige Pfeil der innern Wölblinie ist, so erhält man

$$d_c = \frac{q_0 l_0^2}{8 f_0 (\sigma - q_0)}. \tag{13}$$

Weiter ist zu bedenken, daß die günstigste Bogenachse, je nach dem Pfeilverhältnis f_0/l_0 des Gewölbes, eine von der Parabel verschiedene innere Wölblinie verlangt. Je flacher der Bogen, desto mehr nähert sich die innere Wölblinie der Parabel, je steiler der Bogen, desto weniger. Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, und um für *ganz kleine* Weiten mindestens eine Scheitelstärke von etwa 0,25 m zu erhalten, empfiehlt Verfasser, die Gl. (13) für den praktischen Gebrauch noch durch das Glied $+ 0{,}20\left(1 + \frac{f_0}{l_0}\right)$ zu ergänzen. Die Gl. (13) geht dann in die Form

$$d_c = \frac{q_0 l_0^2}{8 f_0 (\sigma - q_0)} + 0{,}20\left(1 + \frac{f_0}{l_0}\right) \tag{14}$$

über.

Im Beispiel des 2. Bandes (**39**, b) war die Lichtweite l_0 etwa 23 m, $f_0 = 5{,}5$ m; *volle* Belastungshöhe $q_0 = 2{,}5$ m. Das Gewicht des cbm der Wölbsteine war 2,0 t; zulässige Spannung $\sigma = 10$ atm. Daraus berechnet sich

$$d_c = \frac{2{,}5 \cdot 2000 \cdot 23^2}{8 \cdot 5{,}5\,(100000 - 2{,}5 \cdot 2000)} + 0{,}20\left(1 + \frac{5{,}5}{23}\right) = 0{,}88 \text{ m}.$$

Hat man die Scheitelstärke d_c vorläufig aus *Näherungsformeln* (Anhang § 5) berechnet, so findet man aus den Gleichungen (12—14) für die zulässige Spannung σ folgende vorläufige Bedingung:

$$\sigma = q_0\left[1 + \frac{l_0^2}{8 f_0\left\{d_c - 0{,}20\left(1 + \frac{f_0}{l_0}\right)\right\}}\right]. \qquad (15)$$

Um daraus das d_c *endgültig* für einen vorliegenden Fall abzustimmen, muß vorher die *Wahl der zulässigen Spannung* unter Beachtung aller bereits im 1. Bande (unter **7** und **12**) dargelegten Bedingungen getroffen werden.

b. Wahl der zulässigen Spannung. Besonders zu beachten ist der für alle Tragwerke gültige Grundsatz, nach welchem mit dem Wachsen des Verhältnisses zwischen Eigengewicht und Verkehrslast auch die zulässige Spannung größer zu nehmen ist. Danach wird es (für *Stein*bauten noch mehr als für Eisenbauten) notwendig, die zulässige Spannung mit wachsender Bogenweite entsprechend größer zu wählen, weil mit dem Wachsen der Größe des Eigengewichtes der *Einfluß der Achsenkräfte denjenigen der Momente mehr und mehr überwiegt.*

Bei der Bemessung von σ wird auch noch zu beachten sein, daß die wahre Mittelkraftlinie im allgemeinen nicht durch die Scheitel- und Kämpferpunkte der Bogenachse verläuft, weshalb außer den Achsenkräften H und K im Scheitel und an den Kämpfern auch noch ein Moment zur Berechnung kommen müßte. Die Momente können für Vollbelastung aber nur sehr klein sein. Es wird deshalb wohl ausreichen, das Mehr der dadurch verursachten Druckspannungen durch die Wahl einer entsprechend niedrigen zulässigen Spannung auszugleichen.

Schließlich bleibt noch zu bedenken, wie die Sicherheit eines Bogens durch Zufälligkeiten oder Fehler bei der Herstellung, sowie auch durch unvorhergesehene Vorkommnisse im Betriebe des Tragwerkes leiden kann. Mangelhafte Gründung eines Baues ist oft schon Ursache seines Einsturzes geworden. Diese und andere Umstände sind besonders gefährlich für Steingewölbe, weil jede Änderung in den bei der Berechnung des Bogens zugrunde gelegten Maßen und Gewichten eine Verschiebung der augenblicklichen Mittelkraftlinie zur Folge haben muß. Temperaturänderungen, geringe Verdrückungen im Untergrunde, sowie auch starkes elastisches Ausweichen der (bei der Berechnung als starr angesehenen) Widerlager bewirken ein Heben oder Senken der Mittelkraftlinie im Scheitel und an den Kämpfern. So können unter ungünstigen Umständen gewisse *Grenzlagen der Mittelkraftlinie* entstehen, deren Eintreten die Sicherheit des Bogens gefährdet oder gar dessen Einsturz herbeiführt. Diese Grenzlagen werden weiterhin noch ausführlich besprochen werden. Hier wird es genügen, darauf hinzuweisen, daß ihre Gefahren unter sonst gleichen Umständen *mit dem Wachsen der Bogenkraft,*

d. h. also mit dem Kleinerwerden des Verhältnisses zwischen Pfeilhöhe und Bogenweite zunehmen. Aus dem Gesagten ist zu entnehmen einerseits, wie schwierig es ist, für einen *Stein*bogen den *Sicherheitsgrad* passend zu bestimmen, anderseits aber auch, daß dieser in der Regel kleiner zu wählen ist, als unter sonst gleichen Umständen für einen Eisenbogen.

Die zulässige Spannung σ schwankt heute bei ausgeführten bedeutenden Steingewölben für Weiten *bis* 90 m etwa zwischen

$$\sigma = 10 \text{ bis } 60 \text{ atm.}$$

Maßgebend für die Wahl des Sicherheitsgrades ist dabei nicht allein die Druckfestigkeit der Wölbsteine, sondern vielmehr ihres Verbindungsmittels, des Mörtels. Das gilt auch für Betonbogen u. dergl. Geringer als die Druckfestigkeit des Verbindungsmittels darf natürlich auch diejenige der natürlichen oder künstlichen Wölbsteine nicht sein. Die höchste heute zugelassene Spannung von 60 atm entspricht der Druckfestigkeit besten Portlandzement-Mörtels und etwa einem Sicherheitsgrade von $^1/_{10}$ bis $^1/_{15}$.

Eine anerkannt brauchbare Formel zur vorläufigen Berechnung von σ, für verschiedene Weiten und Gewölbeanordnungen, gibt es zur Zeit noch nicht. Man behilft sich meist mit einer Festsetzung von Fall zu Fall, wobei die Druckfestigkeit der preiswert zu Gebote stehenden Steine immer die erste Rolle spielen wird.

Verfasser gibt in seinen Vorlesungen eine Formel für die zulässige Spannung, worin diese im einfachen Verhältnis zur Größe der Lichtweite l_0 wächst und worin außerdem der Tatsache Rechnung getragen wird, daß mit dem Kleinerwerden des Verhältnisses f_0/l_0 die oben geschilderten zufälligen Störungen im Gleichgewicht des Gewölbes gefährlicher werden. Die Formel lautet

$$\sigma = 0{,}5\,(l + f). \tag{16}$$

Sie gibt σ in atm, wenn l und f in Metern eingesetzt werden. Danach erhält man z. B. für einen Bogen von 90 m Weite und 10 m Pfeil

$$\sigma = 50 \text{ atm.}$$

Für dieselbe Weite bei 18 m Pfeil

$$\sigma = 54 \text{ atm.}$$

Bei Halbkreisbogen ist der Pfeil nur von der sog. *Bruchfuge* (**4.** a. 4) ab zu rechnen. Für einen Halbkreisbogen von 25 m Weite berechnet sich also

$$\sigma = 0{,}5\,[25{,}0 \cdot \cos 30^\circ + 12{,}50\,(1 - \sin 30^\circ)] = 13{,}95 \text{ atm.}$$

Schließlich ist beim Gebrauche der Formeln für d_c und σ zu beachten, daß erfahrungsmäßig auch zwischen der Scheitelstärke d_c und der Bogenweite ein nur innerhalb enger Grenzen veränderliches Verhältnis angemessen ist. Darüber ist im Anhange (§ 5) nachzulesen. Danach schwankt das Verhältnis l/d_c

bei *Straßen*brücken zwischen etwa 20 und 50
- *Eisenbahn*brücken - - 20 - 40

und im allgemeinen wächst es mit der Bogenweite.

4. Grenzlagen der Mittelkraftlinie im Gewölbe. Die wirkliche Lage der Mittelkraftlinie wird nach erfolgter Herstellung des Gewölbes, je nach Umständen,

mehr oder weniger von der berechneten abweichen. Das ist eine unvermeidliche Tatsache, die durch entsprechende Wahl des Sicherheitsgrades unschädlich gemacht werden muß. Unter den geschilderten, besonders ungünstigen Umständen kann die Mittelkraftlinie sogar Lagen einnehmen, die den dauernden Bestand des Bogens gefährden. Die *Kennzeichen* solcher Grenzlagen festzustellen, hat daher einige Bedeutung. Man unterscheidet die Mittelkraftlinien *der kleinsten und größten Bogenkraft*, sowie auch ihre Grenzlagen im Augenblicke *des Gewölbeeinsturzes.* Am anschaulichsten stellt man sie vorerst im *starren* Bogen dar, weil in einem solchen auch eine Berührung zwischen Wölblinie und Mittelkraftlinie eintreten, während in einem *elastischen* Bogen kein Stützpunkt dem Bogenrande zu nahe liegen darf, damit nicht in dem betreffenden Randpunkte die zulässige Druckspannung oder gar die Druckfestigkeit überschritten wird.

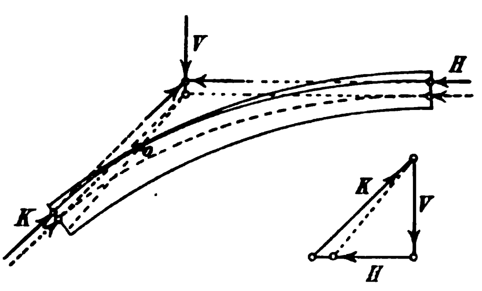


Fig. 11.

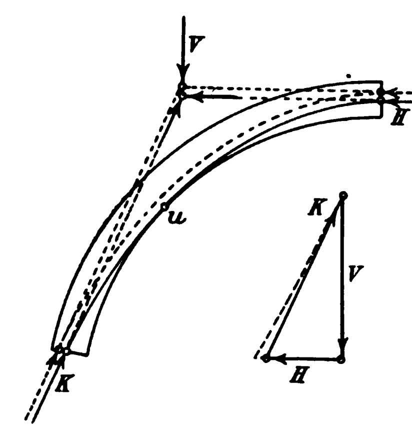


Fig. 12.

a. Linien der kleinsten und größten Bogenkraft.

1. *Eine ganz innerhalb der Randlinien des Gewölbes liegende Mittelkraftlinie entspricht weder der kleinsten noch der größten Bogenkraft.*

Dieser Satz ist aus den Fig. 11 bis 12 zu beweisen. Die darin *punktiert* gezeichnete Mittelkraftlinie läßt sich, *ohne daß dabei H und K geändert werden*, nach oben oder nach unten schieben, bis die Linie einen Punkt *o* oder *u* der Randlinie berührt. Im ersten Falle (Fig. 11) kann man dann die Bogenkraft *H verkleinern*, im zweiten Falle (Fig. 12) sie *vergrößern*. Die punktierte Mittelkraftlinie entspricht also weder der größten noch der kleinsten Bogenkraft.

2. *Eine Mittelkraftlinie, die mit einer Randlinie nur einen einzigen Punkt gemeinsam hat, entspricht weder der kleinsten noch der größten Bogenkraft.*

Der Beweis hierfür ist ebenfalls aus den Fig. 11—12 zu entnehmen. Die Mittelkraftlinie in Fig. 11 berührt die obere Randlinie im Punkte *o*. Man kann die Linie, ohne *H* und *K* zu ändern, nach unten verschieben, so daß sie ganz innerhalb der beiden Randlinien zu liegen kommt. Nach dem 1. Satze entspricht sie also weder der kleinsten noch der größten Bogenkraft. Für die in der Fig. 12 gezeichnete, die untere Randlinie im Punkte *u* berührende Mittelkraftlinie ist der 2. Satz ebenso zu beweisen, indem man die Linie nach oben schiebt.

3. *Eine Mittelkraftlinie, die mit jeder der beiden Randlinien einen Punkt gemeinsam hat, entspricht der kleinsten oder größten Bogenkraft. Je nachdem dabei der obere Berührungspunkt in der obern oder untern Randlinie liegt, ist sie eine sog. Minimal- oder Maximal-Stützlinie.*

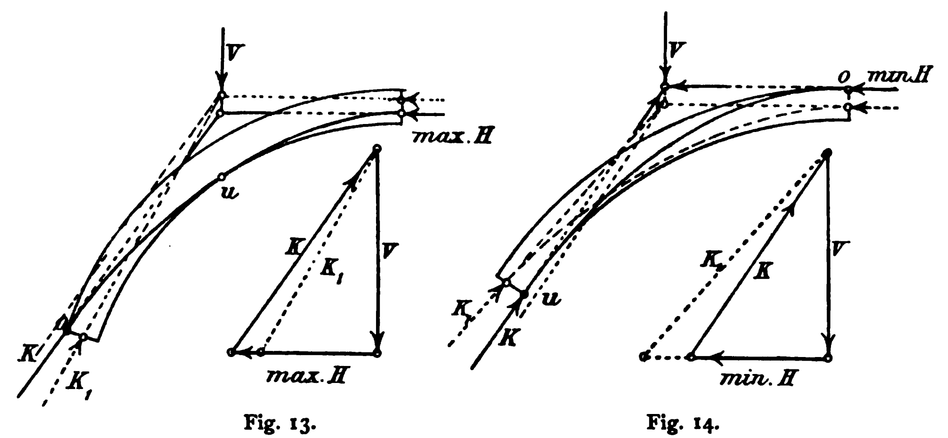


Fig. 13. Fig. 14.

Die Linie in Fig. 14 ist eine *Minimal*-Stützlinie. Man kann sie zwar nach unten schieben, ohne dabei H und K zu ändern, und darauf H derart *vergrößern*, daß die Linie wieder innerhalb zu liegen kommt. Aber man kann die Bogenkraft *nicht mehr verkleinern*, weil bei einem Versuche dies zu tun, also beim Schieben der Linie nach oben, diese wohl durch Vergrößern aber nie durch Verkleinern der Bogenkraft wieder ganz zwischen die Randlinien gebracht werden kann.

Ebenso beweist man den 3. Satz für die in der Fig. 13 dargestellte *Maximal*-Stützlinie. Durch Aufwärtsschieben und *Verkleinern* von H kann man sie zwischen die Randlinien bringen, aber nie durch Abwärtsschieben und Vergrößern.

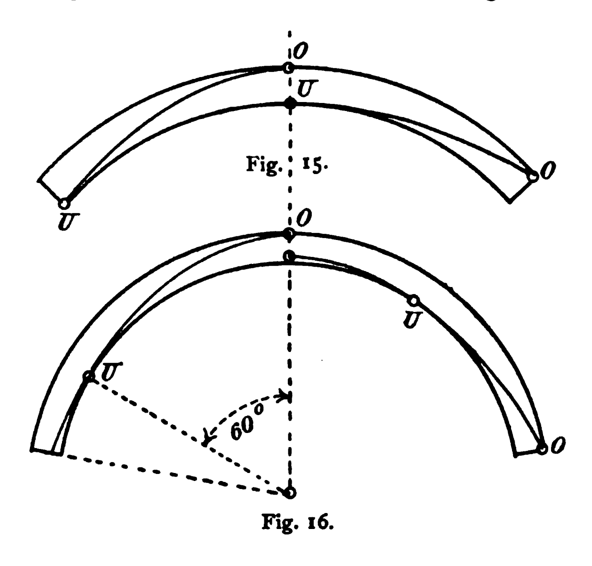


Fig. 15.

Fig. 16.

4. In den Fig. 15—17 sind für einige gebräuchliche Bogenformen Maximal- und Minimal-Stützlinie dargestellt, jene in der rechten, diese in der linken Bogenhälfte. Im *Stich*bogen (Segmentbogen), dessen Zentriwinkel kleiner als 120° ist (Fig. 15), liegen die obern und auch die untern Berührungspunkte im Scheitel oder am Kämpfer. Beim *Voll*bogen (Zentriwinkel über 120° bis 180°) berührt die Minimallinie (Fig. 16) die untere Wölblinie in einem Punkte *u*, dessen Krümmungs-

halbmesser mit der Lotrechten etwa einen Winkel $\varphi = 60°$ einschließt. Die Fuge in der Nähe dieses Punktes wird die *Bruchfuge* genannt, weil hier zuerst die Gefahr einer Zerstörung des Gewölberandes zu befürchten ist (**5**, a). Der obere Berührungspunkt der Maximallinie liegt hier im allgemeinen zwischen Scheitel und Kämpfer.

Fig. 17 veranschaulicht einen Spitzbogen. Hier liegen bei der Maximalstützlinie die Berührungspunkte im Scheitel und Kämpfer, während sie bei der Minimalstützlinie zwischen Scheitel und Kämpfer fallen. Es ist überhaupt schwer, in einem solchen Bogen irgend eine Stützlinie zu zeichnen, die ganz zwischen die Randlinien fällt, ohne die Bogenstärke unnötig groß zu machen. Das gelingt nur, wenn man die Scheitelbelastung verhältnismäßig viel schwerer hält als diejenige an den Kämpfern. Bei dem 15 m weiten Spitzbogen in einem Portale der neuen Dirschauer Weichselbrücke liegen aus diesem Grunde in der Scheitelübermauerung sehr schwere Steine, während zu ihren beiden Seiten bis zu den Kämpfern hin mit Hohlsteinen gemauert ist.

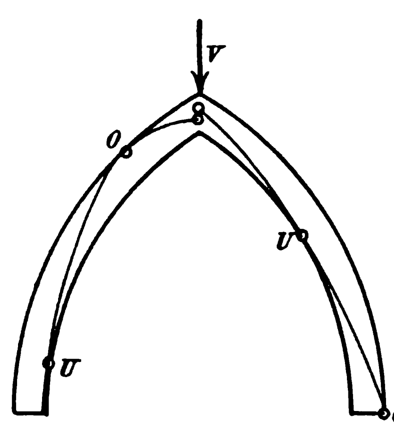


Fig. 17.

5. Die praktische Bedeutung der Stützlinien der kleinsten und größten Bogenkraft, und ihre Verwendung bei der Berechnung von Gewölben, Pfeilern und Widerlagern wird unter **5** erläutert.

b. Grenzlagen beim Gewölbeeinsturz.

1. Der hier zu betrachtende starre Bogen sei aus lauter durch *mörtellose* Fugen von einander getrennten Wölbsteinen hergestellt, sodaß also nur die Druckzone widerstandsfähig ist (I. **122**, **123**). Wenn in einem solchen Bogen die Stützlinie in irgend einem Querschnitte durch einen der beiden Kernpunkte verläuft, so entsteht in dem gegenüber liegenden Randpunkte (I. **108**) die Spannung $\pm$ Null. Überschreitet die Stützlinie den Kernpunkt, so beginnt die Druckzone schmäler zu werden und die mörtellose Fuge des gegenüber liegendes Randpunktes ist bestrebt sich zu öffnen, weil die Zugzone des Querschnittes versagt. Im elastischen Bogen spielt sich der gleiche Vorgang ab, sobald die Festigkeit des Verbindungsmittels der Zugzone überschritten wird, und deshalb ein Reißen oder Öffnen der betreffenden Wölbfuge eintreten muß. Der Standfestigkeit des elastischen Bogens tut ein derartiges Öffnen oder Reißen in einzelnen Fugen keinen Abbruch, wenn nur die Druckzone dabei ausreichenden Widerstand leistet.

Rückt die Stützlinie in irgend einem Querschnitte so nahe an eine Randlinie heran, daß dort die Randspannung größer wird als die Druckfestigkeit des Wölbmaterials, so tritt an dieser Stelle im elastischen Bogen eine teilweise Zerstörung der zu hoch gepreßten Steinkanten ein. Diese wird so lange um sich greifen, bis ihre Ursache, das Überschreiten der Festigkeit in der Gewölbkante der Druckzone, beseitigt ist. Geschieht dies nicht durch Zurückweichen der Stützlinie, so

schafft sich das Gewölbe durch die beregte Zerstörung selbst eine Stützfläche, die groß genug ist, um sicher genug zu tragen. Auch wenn ein solcher Vorgang sich in mehreren Querschnitten eines elastischen Bogens abspielt, so hat das immer noch nicht den Gewölbeeinsturz zur notwendigen Folge.

2. *Im starren symmetrischen Gewölbe wird die Grenze des Gleichgewichtes erreicht, wenn die Mittelkraftlinie (Stützlinie) mit den Randlinien im ganzen fünf Punkte gemeinsam hat, wobei diese abwechselnd in der oberen und unteren Randlinie liegen. Beim unsymmetrischen Gewölbe brauchen nur vier solcher gemeinsamer Berührungspunkte vorhanden zu sein* (Fig. 18—19). Für das elastische Gewölbe gilt

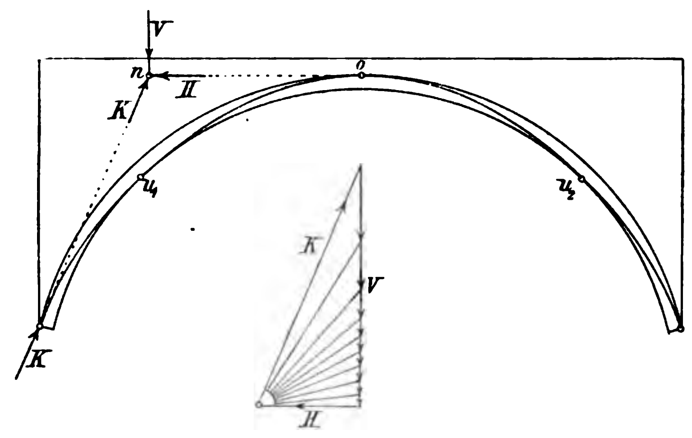


Fig. 18.

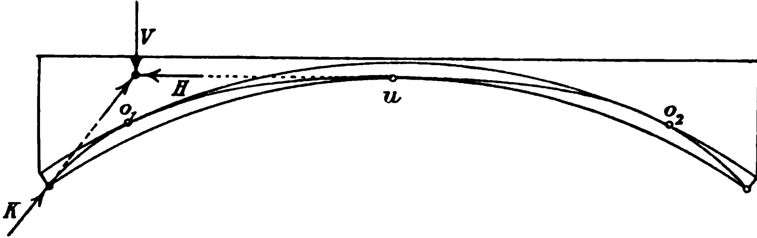


Fig. 19.

im wesentlichen der gleiche Satz, nur ist nach obigem klar, daß in einem solchen das Gleichgewicht schon gestört werden wird, ehe die Stützlinie die beschriebene Grenzlage ganz erreicht.

Die Fig. 18—19 veranschaulichen zweierlei Arten des Gewölbeeinsturzes. Fig. 18 stellt den *Sturz nach außen* und Fig. 19 den *Sturz nach innen* dar. Bei jenem kanten die beiden unteren Bogenteile nach außen, bei diesem dagegen nach innen, wobei sie sich um die betreffende Kämpferkante drehen. Dabei fallen bei jenem die beiden mittleren Bogenteile nach unten, während sie bei diesem nach oben steigen.

Beide Stützlinien entsprechen sowohl der kleinsten als der größten Bogenkraft, sind also die einzigen Mittelkraftlinien, die sich innerhalb der Randlinien zeichnen

lassen. Beim Sturz nach außen entspricht die Stützlinie der beiden oberen Bogenteile der kleinsten, die Stützlinie in jedem unteren Bogenteil der größten Bogenkraft. Beim Sturz nach innen liegt die Maximalstützlinie oben, während die beiden unteren Linien Minimallinien sind.

In der Regel erfolgt ein Gewölbeeinsturz nach außen. Nur ausnahmsweise, wenn von außen her übermäßige wagerechte Kräfte wirken — wie Erd- oder Wasserdruck, vielleicht auch die Kämpferkraft eines anstoßenden größeren Gewölbes — wird der Einsturz nach innen erfolgen, wenn die, bei sinkender Mittelkraftlinie im Scheitel, auf ihren Größtwert angewachsene Bogenkraft das Gleichgewicht nicht mehr herzustellen vermag.

3. *Die Verwendung der Minimal- und Maximalstützlinie* für die Berechnung von Bogenstärken, sowie auch von Pfeilern und Widerlagern wird in der folgenden Nummer **5** behandelt.

5. Widerlager und Pfeiler im Zusammenhange mit dem Gewölbe.

a. Standwiderlager und verlorene Widerlager. Es gibt zwei verschiedene Arten von Widerlagern: *Stand*widerlager und *verlorene* Widerlager. Das Standwiderlager (Fig. 20) ist als eine Stützmauer anzusehen, deren Krone bei *a* mit der Kämpferfuge zusammenfällt und die den Bogenschub *mittelbar* auf den Untergrund überträgt. Dagegen bildet das verlorene Widerlager (Fig. 21) eine ununterbrochene Fortsetzung des Gewölbes, so daß der Bogen sich mit seiner Kämpferfuge gleichsam *unmittelbar* auf den Boden setzt. Das Standwiderlager ist die ältere, das verlorene Widerlager die neuere, von Frankreich übernommene Bauart, die, wenn die gegebene Örtlichkeit ihre Anlage gestattet, sowohl baulich als statisch der älteren überlegen ist. Bei Anwendung der verlorenen Widerlager kann die günstigste Bogenachse bis auf den Untergrund durchgeführt und dadurch das Eintreten größerer Biegungsspannungen vermieden werden. Diese Möglichkeit besteht beim Standwiderlager nur in geringerem Maße. Deshalb ist unter sonst gleichen Umständen die Sicherheit eines verlorenen Widerlagers mit weniger Aufwand an Mauerwerk zu erzielen, als bei der Anlage eines Standwiderlagers. In einem sachgemäß angeordneten Gewölbe mit verlorenem Widerlager gibt es auch keine *Bruchfuge*, und weil diese fehlt, braucht das Gewölbe keine sog. *Hintermauerung* (Zwickelausmauerung *Z* der Fig. 20). Das wird näher zu erläutern sein.

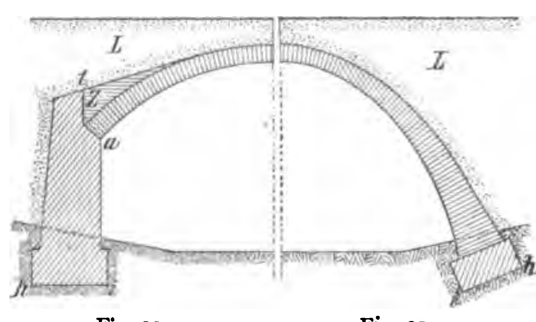


Fig. 20. Fig. 21.

In den Fig. 15—17 (unter **4**) wurde für *Kreis*bögen die Lage der Bruchfuge bereits dargestellt. Diese schließt danach mit der Richtung der Bogenkraft etwa einen Winkel von 30° ein. Bei Flachkreisbögen kommt sie nicht mehr zum Vorschein (Fig. 15). Halbkreise sind (nach I. **65**, b) insofern die *ungünstigsten* aller

Bogenachsen, als sie niemals Mittelkraftlinien sein können. Denn ihre Belastungshöhe q müßte sonst der Gleichung

$$q = \frac{q_0}{\cos^3 \varphi}$$

entsprechen, also q an den Kämpfern *unendlich* groß werden. Das ist aber baulich nicht ausführbar. Selbst für einen Kreisbogen, dessen Zentriwinkel $2\varphi = 90^0$ ist, ergibt sich q nach obiger Bedingung noch etwa dreimal größer als die Belastungshöhe q_0 im Scheitel.

Somit ist bei *Kreis*gewölben eine Bruchfuge nicht zu vermeiden. Man muß deshalb bauliche Mittel anwenden, damit der Gewölberand in der Nähe der Bruchfuge beim Eintreten ungünstiger Umstände nicht übermäßig gepreßt wird. Um dies zu verhüten, den Bogen übermäßig stark zu machen, wäre unsachgemäß. So *übermauert* man denn das Gewölbe an derjenigen Stelle, wo ein Öffnen der Bruchfuge erwartet werden könnte. Diese sog. *Hintermauerung* (Z in Fig. 22) wirkt einerseits durch ihr Gewicht günstig auf die Führung der Stützlinie, andererseits verhindert sie ein Öffnen der Bruchfuge im äußeren Wölbrande, wodurch gleichzeitig auch *ein Heben* des Gewölbes an dieser Stelle erschwert wird.

Wie schon gesagt, fehlt beim gut angelegten verlorenen Widerlager im Gewölbe eine eigentliche Bruchfuge. Wenn daher bei einem solchen Widerlager Übermauerungen angewendet werden, so dienen diese entweder nur dazu, um an entsprechender Stelle auf die Führung der Bogenachse günstig zu wirken oder sie bezwecken die Herstellung einer geeigneten *Abwässerung* des Gewölberückens.

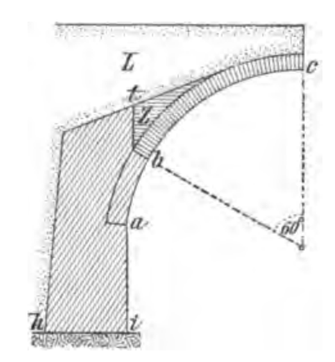


Fig. 22.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß die *unterhalb* einer Bruchfuge liegenden Gewölbeschenkel mit zum Widerlager zu rechnen sind (Fig. 22). Man hat sich demnach den Teil bc des Bogens mit der Hintermauerung Z durch einen Schnitt bt vom Widerlager getrennt zu denken und bei der Berechnung die Lasten rechts vom Schnitte dem Gewölbe, links davon aber dem Widerlager zuzuweisen. Beim verlorenen Widerlager ist eine derartige Lastteilung unnötig.

b. Tätige und ruhende Bogenkraft beim Kanten von Widerlagern und Pfeilern.

1. Wenn der *Fugendruck* im Gewölbe, sowie namentlich auch der *Bodendruck* in der Sohle des Widerlagers (I. **12**) die zulässigen Grenzen an keiner Stelle, und bei keiner Lage der Belastung, überschreitet, so bedarf es aus Gründen der Sicherheit der Untersuchung auf Kanten des Widerlagers nicht mehr. Denn ein solches Kanten in der Kraftebene um einen Randpunkt h oder i der Widerlagersohle (Fig. 23—24) wäre nur dann zu befürchten, wenn gewisse Grenzlagen der Stützlinie sich einstellen, die sowohl Randpunkte des Bogens als auch der Widerlagersohle berühren und dort schon zerstörend wirken müssen (**4**, b), ehe das Kanten eintreten kann. Immerhin ist aber die Betrachtung der Grenzen des Gleichgewichtes

im Augenblicke des Kantens in statischer Hinsicht belehrend. Deshalb sollen die beiden möglichen Fälle: *Kanten nach außen und Kanten nach innen*, die in den Fig. 23—24 für Standwiderlager dargestellt sind, besprochen werden. Verlorene Widerlager sind hinsichtlich der Möglichkeit des Kantens, wie leicht einzusehen, in einer weit günstigeren Lage als Standwiderlager.

2. Wirken keinerlei außergewöhnliche, wagerechte Kräfte gegen die Hinterwand des Widerlagers (wie es in Fig. 24 geschieht), so kann nur ein Kanten nach *außen* (um den Randpunkt *h*) eintreten (Fig. 23). Die Grenze des Gleichgewichtes wird erreicht, sobald sich für den Bogen im Zusammenhange mit dem Widerlager eine Mittelkraftlinie zeichnen läßt, die sowohl der größten als auch der kleinsten Bogen-

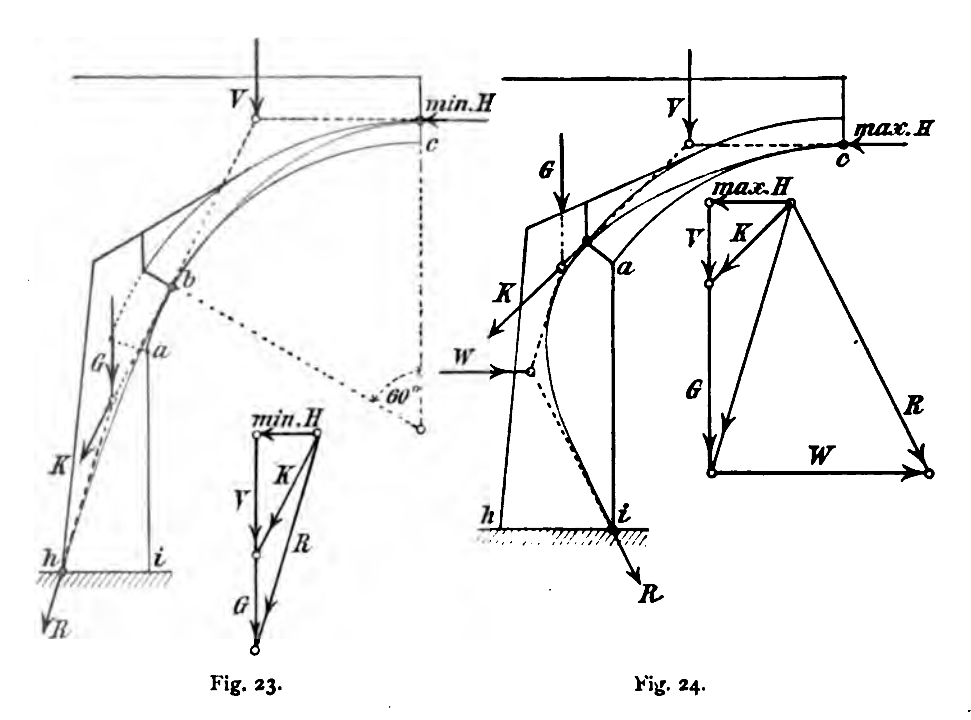


Fig. 23. Fig. 24.

kraft entspricht, die also (bei symmetrischer Anlage) die Randlinien in fünf Punkten berührt (4, b, 2). Dabei entsteht im Bogen (bis zur Bruchfuge bei *b*) die *Minimal-*, im Widerlager die *Maximal-*Stützlinie.

Wie in außergewöhnlichen Fällen eine auf die Hinterwand eines Standwiderlagers drückende wagerechte Kraft (von Erd- oder Wasserdruck, oder auch von einer benachbarten Bogenkraft herrührend) ein Kanten nach *innen* bewirken könnte, ist in der Fig. 24 veranschaulicht. Der Bogen wird dabei bis aufs äußerste widerstehen, d. h. seine Stützlinie entspricht im Augenblicke des Kantens der größten Bogenkraft, während im Widerlager die Minimalstützlinie entsteht.

Die Seillinie der größten und kleinsten Bogenkraft ist in den Fig. 23—24 *rot* gezeichnet. Aus den zugehörigen beiden Kraftecken ist zu entnehmen, wie die Mittelkräfte des Bogens und Widerlagers sich zusammensetzen. Darin stellt *V*

die auf den Bogen, G die auf das Widerlager fallende Belastung dar. R ist die Mittelkraft aller Lasten, die ihren Stützpunkt entweder in h oder in i findet. Das Erläuterte läßt sich in folgende Sätze fassen:

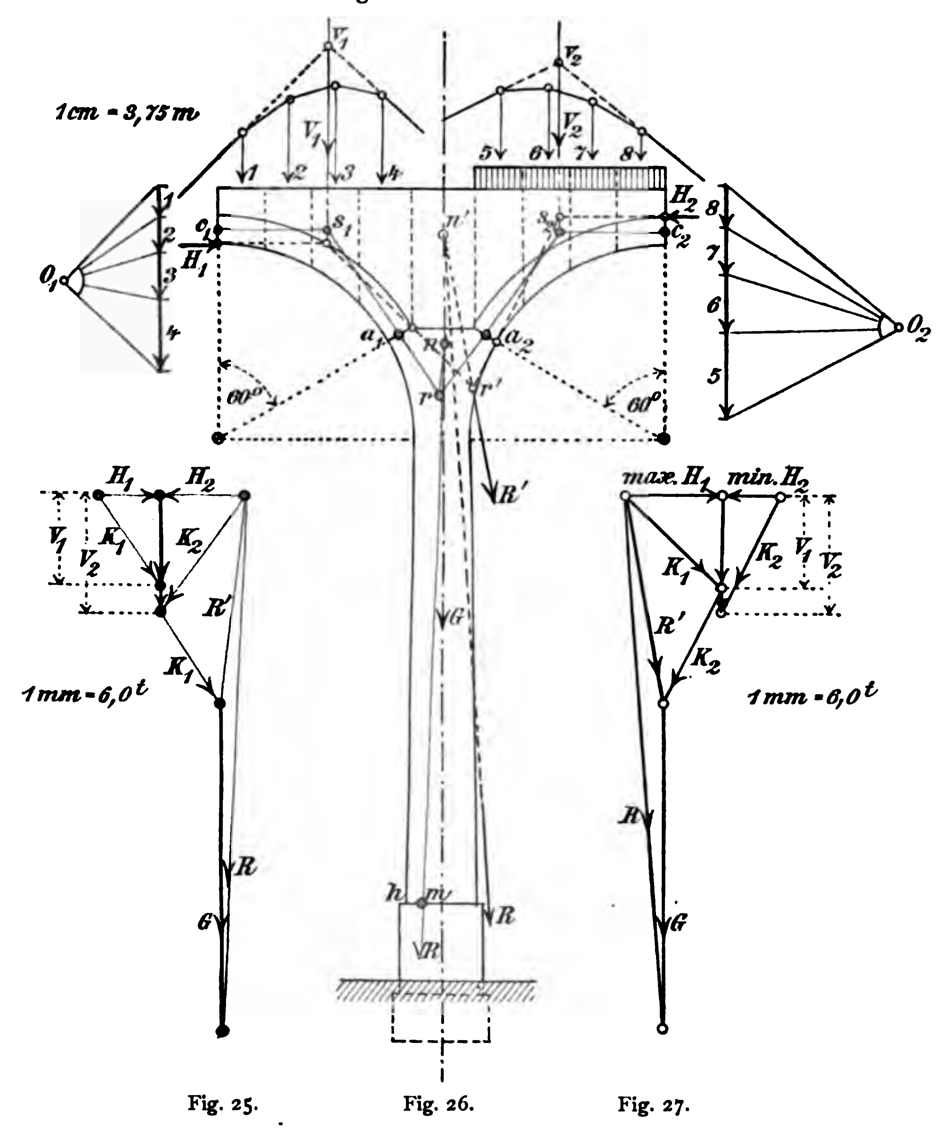


Fig. 25. Fig. 26. Fig. 27.

Die beim Widerlager auf das Kanten nach außen wirkende Bogenkraft heißt die tätige (aktive). Dem Kanten eines Widerlagers nach innen widersteht die ruhende (passive) Bogenkraft.

Die tätige Bogenkraft entspricht der Minimal-, die ruhende Bogenkraft der Maximalstützlinie des Gewölbes.

3. In den Fig. 25—27 ist *das Kanten eines Mittelpfeilers* untersucht worden. Zwei Kreisgewölbe von je 20 m Stützweite stoßen auf dem Pfeiler zusammen. Es

fragt sich, ob bei einseitiger Verkehrsbelastung einer der Öffnungen ein Kanten um den gegenüber liegenden Randpunkt h des Pfeilerfußes eintreten kann. Zu dem Zwecke darf nach vorigem angenommen werden, daß das linksseitige, nur sein Eigengewicht tragende Gewölbe die größte ihm zu Gebote stehende (ruhende) Bogenkraft entfalten wird, um der tätigen Bogenkraft des Nachbargewölbes entgegen zu arbeiten. Danach ist in der Fig. 26 links die Maximal-, rechts dagegen die Minimalstützlinie (**4**, a) mit punktierten Linien gezeichnet. Aus den Kämpferkräften K_1 und K_2 fand sich in der Fig. 27 die Mittelkraft R', deren Richtung die lotrechte Pfeilerachse im Punkte n' (Fig. 26) trifft. In n' setzen sich R' und das gesamte Pfeilergewicht zur Mittelkraft R aller Kräfte zusammen. Diese fällt außerhalb des Pfeilerfußes und sogar nach der dem Punkte h gegenüber liegenden Pfeilerseite. Das bedeutet nichts anderes, als eine Beantwortung der gestellten Frage im verneinenden Sinne: *Ein Kanten um h ist ausgeschlossen.*

Man kann sich nun die Bogenkraft H_1 allmählich steigend und kleiner, die Bogenkraft H_2 in gleicher Zeit allmählich sinkend und größer werdend denken. Dann wird dabei, wie leicht einzusehen, der Angriffspunkt r' (Fig. 26) der Kraft R' nach links rücken, bis er schließlich nach r fällt, wenn, wie das in *roten* Linien dargestellt ist, die Mittelkraftlinie in jedem der beiden Gewölbe durch den Scheitel- und den Kämpferpunkt der Bogenachse verläuft. Aus dem rot gezeichneten Krafteck der Fig. 25 erkennt man ferner, wie dann auch die Mittelkraft R nach inks rücken muß, d. h. wie die Gefahr des Kantens um h allmählich größer wird. Ein wirkliches Kanten um h ist aber ausgeschlossen, weil sonst die Bogenkraft H_2 ihrem Maximum und H_1 ihrem Minimum zustreben müßte, was nach vorigem widersinnig wäre.

Das vorgeführte Beispiel läßt schließlich noch erkennen, daß es, wenn man statisch bestimmt vorgehen will, wohl begründet ist, *die größte Randspannung im Pfeilerfuße* aus der *rot* gezeichneten Mittelkraftlinie zu berechnen, wobei man diese in jedem Gewölbe, ebenso wie bei der Berechnung der Bogenstärke, durch die Scheitel- und Kämpferpunkte der Bogenachse legt. Im allgemeinen wird allerdings immer noch zu untersuchen bleiben, ob nicht etwa die Grenzwerte der Randspannungen bei Vollbelastung beider Öffnungen entstehen (vgl. das Beispiel unter **7**, b).

Im vorliegenden Falle berechnet sich das Gesamtgewicht des Pfeilers, bei 1 m Belastungshöhe der Verkehrslast und für 1 m Tiefe des Gewölbes mit

$$G = 2\left[23 \cdot 14 - \frac{10^2 \cdot \pi}{2} + \left(\frac{3 + 3{,}6}{2}\right) 24\right] = 488{,}4 \text{ t},$$

wenn das Gewicht der Kubikeinheit 2 t beträgt. Das gibt im Pfeilerfuße eine Druckspannung

$$\sigma = \frac{488\,400}{360 \cdot 100} = 14{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Dagegen wirkt bei der gezeichneten *einseitigen* Belastung eine Längskraft P im Stützpunkte m, die (nach Fig. 26) mit

$$P = V_1 + V_2 + G = 488{,}4 - (13 \cdot 1)\,2 = 462{,}4 \text{ t}$$

anzuschreiben ist. Der Stützpunkt m liegt 95 cm vom Schwerpunkte. Daraus folgt

$$\sigma = \frac{M_k}{F \cdot k} = \frac{462400\left(95 + \frac{360}{6}\right)}{360 \cdot 100 \cdot \left(\frac{360}{6}\right)}$$

oder

$$\sigma = 33{,}2 \text{ kg/cm}^2 \text{ Druck},$$

wobei vorausgesetzt worden ist, daß die *Zug*zone elastisch widerstandsfähig ist.

6. Die Berechnung der Randspannungen. Hier kommen die *Fugenspannungen* in Gewölben, Widerlagern und Pfeilern, sowie der *Bodendruck* in den Gründungssohlen in Betracht.

a. Die Fugenspannungen.

1. *Als Rechnungsgrundlage* dient die für das größte, durch die Verkehrslast erzeugte Moment gezeichnete bekannte Mittelkraftlinie (**2**, S. 10 und **41** im 2. Bande), die den Scheitel- und die Kämpferpunkte der Bogenachse trifft und dabei keine Kernlinie schneiden darf. Die Gründe, warum Verfasser hierbei von Tolkmitt abweicht, wurden (unter **2**, b) ausführlich dargelegt. Häufig kommt auch noch ein *drittes Verfahren* in Anwendung. Dabei werden Scheitel- und Gewölbestärken vorläufig bestimmt (**3**) und dann wird eine Mittelkraftlinie durch den Scheitel der oberen und die Kämpferpunkte der unteren *Kernlinien* gelegt, also gleichsam eine *Minimalstützlinie zwischen den Kernlinien* gezeichnet. Die Benutzung einer solchen Linie ergibt aber wesentlich größere Bogenstärken als nach der Berechnung Tolkmitts und des Verfassers, obwohl hierbei die Stärken im allgemeinen schon etwas größer ausfallen als nach den Elastizitätsberechnungen. Verfasser glaubt daher, dem dritten Verfahren die innere Berechtigung absprechen zu müssen. Anders läge allerdings die Sache, wenn man eine *zwischen die Kernlinien gezeichnete* Minimalstützlinie — und unter Umständen auch eine solche Maximalstützlinie — als Grundlage für die Berechnung von Randspannungen oder Bodendrücken in Widerlagern und Pfeilern verwenden wollte. Näheres darüber weiterhin unter 3.

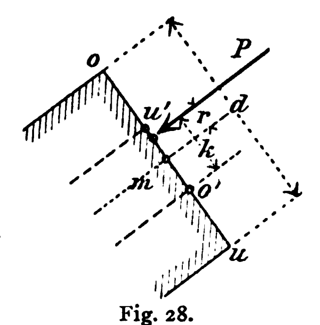


Fig. 28.

2. Der *Fugendruck* läßt sich rechnerisch oder graphisch bestimmen, sobald der *Stützpunkt* der Fuge — d. i. ihr Schnittpunkt mit der Mittelkraftlinie — gegeben ist. Die Längskraft P findet sich aus dem Krafteck, mit dessen Hilfe die Mittelkraftlinie gezeichnet wurde. Hierzu sind auch die Nummern **36** und **37** des § 6 im 2. Bande zu vergleichen. Danach findet man die Randspannungen allgemein entweder aus dem Kernmomente nach Gl. (73)

$$\sigma = \frac{M_k}{F \cdot k}$$

oder aus dem Schwerpunktsmomente

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_m}{W}.$$

Auf den *rechteckigen Gewölbequerschnitt* (der Tiefe = 1) bezogen (Fig. 28) erhält man für $F = 1 \cdot d$, $k = \frac{1}{6} d$ und $W = 1 \cdot \frac{d^2}{6}$

$$\sigma = \frac{6 \cdot M_k}{d^2}$$

oder

$$\sigma = \frac{P}{d} + \frac{6 M_m}{d^2} . \tag{17}$$

Ist r der Abstand der Längskraft vom Schwerpunkte des Querschnittes, so ist

$$M_k = P\left(r + \frac{d}{6}\right)$$

und

$$M_m = P \cdot r . \tag{18}$$

Bezeichnet man den *lotrechten* Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Querschnittes und der Mittelkraftlinie mit v, so ist (nach **6**)

$$M_m = H \cdot v . \tag{19}$$

Fällt der Stützpunkt *außerhalb des Kernes* und ist dabei die *Zugz*one elastisch nicht widerstandsfähig (I. **129**), so erhält man die Druckspannung am Rande mit

$$\sigma = \frac{2P}{3z} , \tag{20}$$

wenn z den Abstand des Stützpunktes vom Rande vorstellt (Fig. 29).

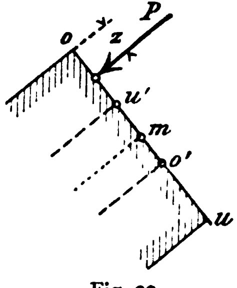


Fig. 29.

Die Herleitung dieser Formel findet sich unter I. S. 413.

3. *In Querschnitten von Widerlagern und Pfeilern* berechnet man die Randspannungen auch nach den obigen Gleichungen wobei die für das Gewölbe benutzte Mittelkraftlinie bis zur Erdbodenschicht durchzuführen ist. In jedem Falle ist aber außerdem noch zu überlegen, welche *Grenzlagen* der Mittelkraftlinie etwa noch in Betracht kommen können, um in jedem Querschnitte von den Kämpfern bis zur Gründungssohle eine Strecke einzugrenzen, in welcher *alle maßgebenden Stützpunkte* liegen. Nur auf solchem Wege ist es möglich, einerseits die Sohle von Widerlagern an die passendste Stelle des Untergrundes zu legen und anderseits das Widerlager im Innern baulich so auszubilden, daß die strahlenförmig verlaufenden *Kraftbüschel* überall auf Baustoffe treffen, die einen der Größe der zugehörigen Kräfte entsprechenden Widerstand leisten. Das zweite Beispiel (unter **7**) wird das hier nur allgemein Angedeutete näher erläutern.

b. Der Bodendruck.

1. *Die Sicherheit eines Widerlagers oder Pfeilers*, und damit auch die Sicherheit des Gewölbes, hängt wesentlich von der Größe des eintretenden *Bodendruckes* ab. Denn die Spannungsgrenzen, innerhalb welcher der Erdboden, abgesehen von festem Stein- und Felsboden, noch als ausreichend tragfähig angesehen wird, betragen etwa nur 3—6 atm. Sie liegen also weit unterhalb derjenigen Grenzen,

die für Baustoffe noch als zulässig gelten (I. **7** und **12**). Die Sicherheit des Baues hängt deshalb in erster Linie von der ausreichenden Tragfähigkeit des Untergrundes ab. In zweiter Linie stehen erst die Fugenspannungen im Innern von Gewölbe und Widerlager.

Weil nun eine *zug*feste Verbindung zwischen der Gründungssohle hi (Fig. 20 bis 22) und dem Erdboden, auf welchen sie sich stützt, im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden kann, so berechnet sich der Bodendruck immer nach der obigen Gl. (20). Zeichnerisch erhält man seine Größe aus der *Einflußlinie einer Randspannung* (nach I. **110** und **129**) wie folgt.

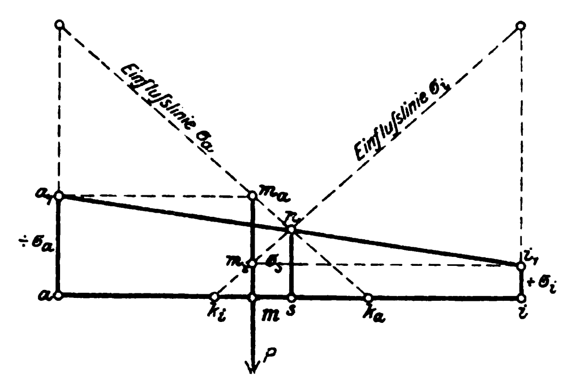


Fig. 30.

2. Um eine *Randspannung* darzustellen, trägt man im Schwerpunkte s der Fig. 30 die Strecke

$$\overline{sp} = \sigma_s = \frac{P}{F}$$

auf. Dann ist die durch p und den Kernpunkt k_a bestimmte Gerade die Einflußlinie der Randspannung σ_a für die Wanderung der Last P zwischen den Randpunkten a und i. Ebenso ist die durch p und k_i gelegte Gerade die Einflußlinie von σ_i. Ist P eine in m angreifende Längskraft, so ist die Strecke $\overline{mm_a}$ (Fig. 30) gleich der von P erzeugten Randspannung σ_a. Ebenso ist mm_i die Randspannung σ_i. Trägt man jede der Randspannungen in ihrem Wirkungspunkte als Ordinate auf

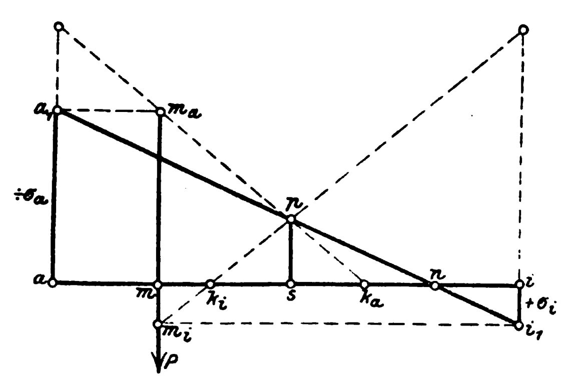


Fig. 31.

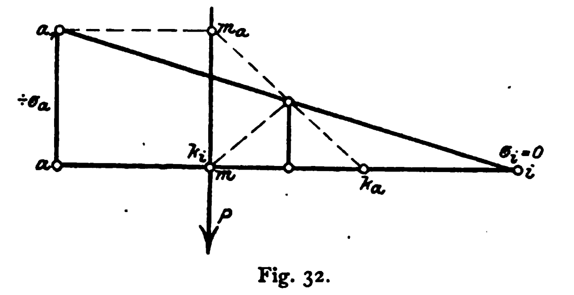


Fig. 32.

$$\sigma_a = \overline{aa_1} \quad \text{und} \quad \sigma_i = \overline{ii_1},$$

so muß die Spannungslinie $a_1 i_1$ durch den Punkt p verlaufen. Liegt P außerhalb des Kernes, so bleibt die obige Darstellung bestehen (Fig. 31). Ist in diesem Falle die Zugzone elastisch nicht widerstandsfähig wie bei einer Mauer oder einem

Widerlager, die beide lose auf dem Erdboden stehen, so erhält man graphisch den zugehörigen Bodendruck aus der Fig. 32. Es ist danach

$$\sigma_a = 2 \cdot \sigma_s = 2 \frac{P}{F}.$$

3. Wegen der Wichtigkeit der sicheren Feststellung des größten Bodendruckes ist bei seiner Berechnung zu überlegen, welche verschiedene Grenzlagen der Stützlinien in Betracht kommen müssen. Man könnte sagen, das wäre wohl am besten mit Hilfe der Elastizitätstheorie zu entscheiden. Das ist aber nicht der Fall. Denn hier handelt es sich um Verschiebungen der Mittelkraftlinien beim Eintreten ungewöhnlicher aber möglicher Ereignisse, wie sie als Folge mangelhafter Herstellung des Baues oder dgl. entstehen können, also um Möglichkeiten, die bei der Wahl des Sicherheitsgrades schon berücksichtigt sein müssen. Im Entwurfe kann man schädlichen Wirkungen solcher Zufälligkeiten dadurch vorzubeugen suchen, daß man unter den unendlich vielen *möglichen* Stützlinien diejenigen mit in Rechnung zieht, welche der kleinsten oder größten Bogenkraft entsprechen. Will man diese Linien nicht durch die bekannten Punkte der Gewölberänder führen (**4**, a), so erscheint es wohl zulässig, entweder die Randlinien mit den *Kern*linien zu vertauschen oder die Scheitel- und Kämpferpunkte der Grenzlagen nur soweit bis zum Gewölberande vorrücken zu lassen, bis dieser *eine der Druckfestigkeit des Steines* gleiche Spannung erfährt. Ist D die Druckfestigkeit und z der gesuchte Abstand zwischen Stützlinie und Gewölberand (Fig. 29), so berechnet sich

$$\sigma = D = \frac{2P}{3z}$$

oder

$$z = \frac{2P}{3D}. \qquad (21)$$

Über Anwendung des Gesagten sind die Beispiele unter **7** und in § 3 zu vergleichen.

c. Temperatureinflüsse. Die Temperatur wirkt in gleicher Weise wie die Belastung: sie erzeugt Formänderungen und infolgedessen auch Spannungen (I. **8** und **36**). Unter der Voraussetzung einer unwandelbaren Lage der Kämpferfugen (**1**) wird der Bogenscheitel bei einer Wärme*zunahme* infolge seiner Verlängerung sich heben, umgekehrt bei Wärme*abnahme* sich senken. Die Stützlinie wird sich deshalb bei Erhöhung der Luftwärme im Scheitel senken und am Kämpfer heben. Bei einer Abnahme tritt der umgekehrte Fall ein. Um die Einwirkungen der Temperatur möglichst unschädlich zu machen, wäre danach ratsam, die Gewölbe bei niedriger Luftwärme herzustellen und zu schließen. Denn wenn nach erfolgtem Schluß des Bogens das sog. *Lehrgerüst* (**1**, a), das bis dahin die Gewölbelast zu tragen hatte, beseitigt wird, beginnt der noch nicht völlig erhärtete Bogen, wie man sagt, sich zu setzen, d. h. zu verkürzen, und die Widerlager weichen elastisch aus, infolgedessen wird die Stützlinie, wie bei der Wärmeabnahme, im Scheitel sich heben und an den Kämpfern sinken.

Mit Hilfe der (unter **2**, b) abgeleiteten drei Grundbedingungen für die Lage der Mittelkraftlinie läßt sich die allein durch Temperatureinfluß hervorgerufene Bogenkraft H_t unter der Voraussetzung berechnen, daß überall im (*gewichtlos* gedachten) Gewölbe ein gleicher Wärmegrad eingetreten ist. Ist nämlich der Bogen überall gleich warm oder kalt, so würde er, an einem Kämpfer freigemacht, nach erfolgter Formänderung seiner ursprünglichen Gestalt ähnlich bleiben, weil alle seine Abmessungen nach der Länge und Quere sich in gleichem Maße verändern. Also würde die Kämpferfuge kk des freigemachten Bogenendes bei a

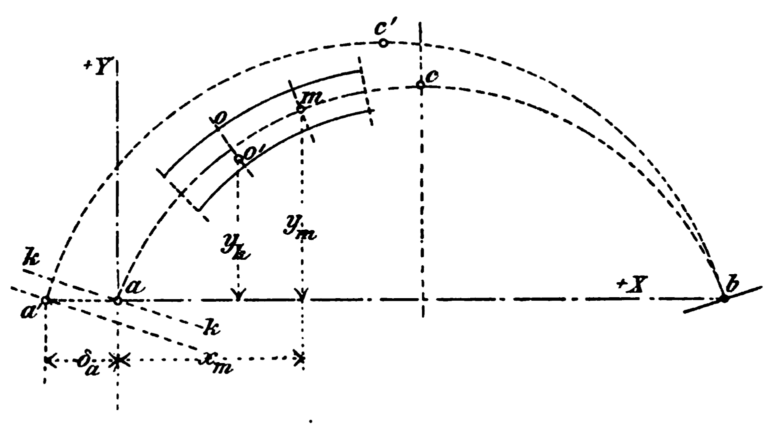


Fig. 33.

(Fig. 33) *parallel zu ihrer ursprünglichen Lage* sich um eine Strecke $\delta_a = aa' = \int d\delta_x$ in der Richtung der X-Achse verschieben: bei Wärme nach außen, bei Kälte nach innen. Eine Drehung der Fuge könnte nicht stattfinden, demnach wäre $\int d\varphi$ und deshalb auch $\int d\delta_y$ gleich Null zu setzen. An Stelle der drei Gl. (3) tritt demnach nur eine einzige, nämlich

$$\delta_a = \int d\delta_x = \int \frac{M_m}{EJ} y\,du = 0\,. \qquad (22)$$

Die durch die Temperatur allein hervorgebrachte Verschiebung $\int d\delta_x$ ist bekannt. Bezeichnet man sie mit δ_t, so ist

$$\delta_t = \pm \alpha t l$$

anzuschreiben, wenn α (nach I. **8**) die Temperaturdehnung für 1° Celsius, t die Zu- oder Abnahme der Wärme über eine mittlere Temperatur (+ 10° C.) und l die Bogenweite ist. Denn weil alle Bogenabmessungen eine gleiche Längenänderung erfahren, so muß die Änderung der Länge l das Maß der *von der Temperatur allein* herbeigeführten Verschiebung ergeben.

Die Gesamtverschiebung $\int d\delta_x$ wird aber auch noch von der infolge der Temperaturänderung hervorgerufenen Bogenkraft H_t beeinflußt. Je nachdem Wärme-

oder Kälteeinfluß vorliegt, wirkt H_t positiv oder negativ, und je nachdem die Bogenkraft positiv oder negativ ist, verringert oder vergrößert sie die von der Belastung erzeugten Spannungen. Das von H_t erzeugte Moment M_m ist mit

$$M_m = \mp H_t \cdot y_m$$

anzuschreiben (Fig. 33).

Demnach erhält man für die Gesamtverschiebung des freien Bogenendes in der Richtung der X-Achse

$$\int d\delta_x = \pm H_t \int_0^l \frac{y_m^2}{EJ} du \mp \alpha t l = 0$$

und daraus

$$H_t = \frac{(\alpha t l) E}{\int_0^l \frac{y_m^2}{J} du}.$$

Setzt man

$$du = \frac{dx}{\cos\varphi}$$

so gibt das

$$H_t = \frac{(\alpha t l) E}{\int_0^l \frac{y_m^2 dx}{J \cos\varphi}}. \qquad (23)$$

Bei einer Gewölbetiefe gleich der Einheit, und wenn die Projektion der Gewölbestärke auf die Lotrechte überall in bekannter Weise (**3**, a) gleich der Scheitelstärke d_c bemessen wird, läßt sich das Trägheitsmoment mit

$$J = \frac{1}{12} \frac{d_c^3}{\cos^3\varphi}$$

anschreiben. Dies eingesetzt gibt

$$H_t = \frac{(\alpha t l) d_c^3 E}{12 \int_0^l y_m^2 \cos^2\varphi \, dx}. \qquad (24)$$

In besondern Fällen kann das Integral des Nenners, falls es nicht unmittelbar zu lösen ist, durch Flächenberechnung, unter Anwendung der Simpsonschen Regel erhalten werden. Ein Beispiel vgl. man unter **7**, c. Weitere Beispiele werden die Elastizitätsberechnungen der zweiten Hälfte dieses Bandes bringen.

Erfahrungsmäßig darf man für Steine und Beton

$$\alpha = 0{,}000010$$

annehmen, und bei einer mittlern Luftwärme von 10° C. für mitteleuropäische Verhältnisse

$$t = \pm 20^\circ \text{ bis } 30^\circ \text{ C.}$$

Das Dehnungsmaß E für Druck beträgt etwa

für *Ziegelgewölbe*	$E =$ 30—50	t/cm²
- *Bruchsteingewölbe*	$E =$ 70—100	-
- *Stampfbetongewölbe*	$E =$ 350—400	-

Hinsichtlich des Betons ist auch I. **122** zu vergleichen.

Die durch H_t allein verursachte Temperaturspannung, z. B. im obern Wölbrande irgend eines Querschnittes (Fig. 33) ist

$$\sigma_{o t} = \frac{H_t \cdot y_k}{F \cdot k} = \frac{6 \cdot H_t y_k}{d^2}, \tag{25}$$

wenn y_k den Hebelarm der Bogenkraft in bezug auf den Kernpunkt o' des Querschnittes bedeutet (Fig. 33). Bei Wärmezunahme ist σ_{ot} ein Druck, bei Wärmeabnahme ein Zug.

7. Zahlenbeispiele.

a. Feststellen der Gestalt und Stärke des Bogens.

Aufgabe. Für den symmetrischen Hauptbogen einer steinernen Eisenbahnbrücke, die — wie die Fig. 34—37 veranschaulichen — *über eine Schlucht führt, soll die günstigste Bogenachse bei mittlerer Belastung gesucht werden.*

1. Gegeben sind Scheitel und Kämpferpunkte der *innern* Wölblinie und zwar die Lichtweite mit 24,0 m, der Pfeil mit 8,0 m. Die Belastungslinie (I. **65**, a) darf wagerecht angelegt werden. Der Bogen hat über obigem Scheitel eine Höhe von 2,0 m. Die an der Baustelle zu gewinnenden Wölbsteine haben ein Gewicht von 2 t/cbm und eine Druckfestigkeit von 300 atm. Danach kann die Verkehrslast (vgl. den Anhang § 5) zu 0,8 m Höhe angenommen werden.

Die Scheitelstärke des Bogens kann vorläufig unter Berücksichtigung folgender Umstände festgesetzt werden. Wie aus dem Anhange näher zu erkennen ist, hält die Bogenstärke bei ausgeführten Bauten im Vergleiche zur Bogenweite ziemlich enge Grenzen ein. Sie schwankt (wie auch unter **3**, b schon vermerkt wurde) je nach der Größe der Bogenweite und des Pfeilverhältnisses bei Eisenbahnbrücken zwischen $^1/_{20}$ und $^1/_{40}$ der Stützweite. Weil das vorgeschriebene Verhältnis f_o/l_o mit $^1/_3$ ein mittleres ist, so erscheint es wohl angezeigt, für vorliegenden Fall etwa $d_c = {}^1/_{32}\, l_o$ zu wählen. Das wären 75 cm. Es ist aber von vornherein zu untersuchen, ob nicht etwa bei Annahme einer solchen Scheitelstärke die *zulässige Spannung* höher ausfällt, als die zu Gebote stehenden Bausteine vertragen. Man findet nach Gl. (15)

$$\sigma = \quad q_o\left[1 + \frac{l_o^2}{8 f_o\left\{0{,}75 - 0{,}20\left(1 + \frac{f_o}{l_o}\right)\right\}}\right]$$

$$\sigma = 2 \cdot 2{,}8\left[1 + \frac{24 \cdot 24}{8 \cdot 8\left\{0{,}75 - 0{,}20\left(1 + \frac{8}{24}\right)\right\}}\right] = 110\ \text{t/m}^2 = \text{rund } 11 \text{ atm.}$$

Das gäbe also 27 fache Sicherheit. Selbst bei einer möglichen Verrückung der Bogenkraft bis zur obern Kernlinie würde die Sicherheit noch mindestens halbmal so groß sein.

Wollte man σ vorläufig nach der Gl. (16) berechnen, so gäbe das, wenn $l_o/f_o = l/f$ gesetzt wird,

$$\sigma = 0{,}5\,(24 + 8) = 16{,}0 \text{ atm},$$

also bei etwa 19-facher Sicherheit

$$d_c = \frac{5{,}6 \cdot 24 \cdot 24}{8 \cdot 8\,(160 - 5{,}6)} + 0{,}20\,(1 + {}^1/_3) = 0{,}60 \text{ m}.$$

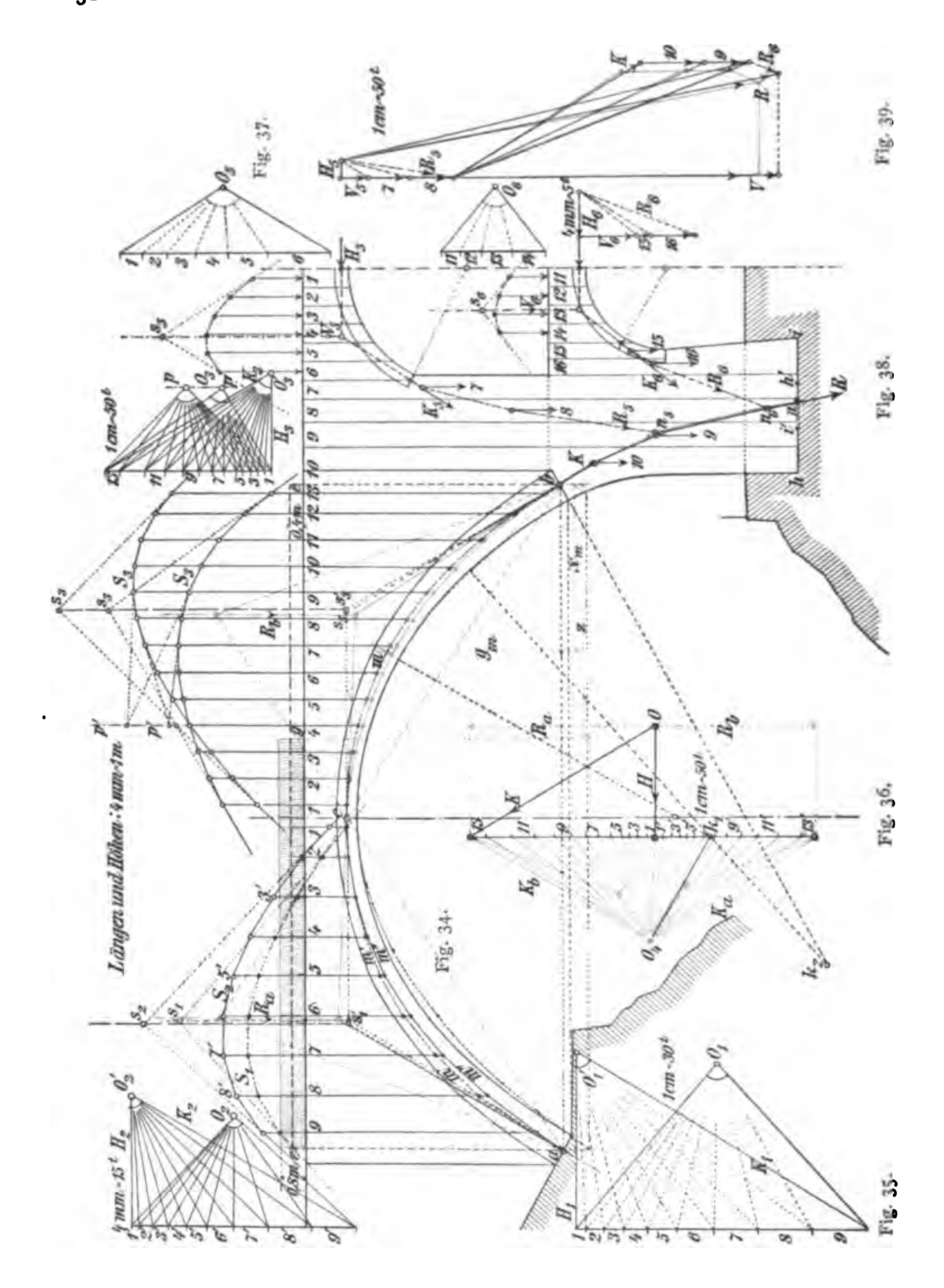


Fig. 34. Fig. 35. Fig. 36. Fig. 37. Fig. 38. Fig. 39.

Das Pfeilverhältnis hätte sich in diesem Falle zu

$$\frac{24}{0{,}60} = 40$$

ergeben, was den praktisch bisher eingehaltenen äußersten Grenzen entspricht. Zweckmäßiger ist es deshalb, die Scheitelstärke, wie geschehen, etwas größer zu wählen.

Die Kämpferstärke d_a des Bogens wurde vorläufig auf etwa 1,30 m festgesetzt. Dies Maß entspricht ungefähr dem zweckmäßigen Verhältniß $d_a = d_c/\cos\varphi$. Außerdem gestattet es die Abrundung der Stützweite l auf 25,0 m und der Pfeilhöhe auf 8,1 m.

Um zuerst einen ungefähren Anhalt für die richtige Führung der Bogenachse zu erhalten, wurde die innere Wölbung als Parabel angenommen, wie dies in der linken Bogenhälfte der Fig. 34 punktiert angedeutet ist. Sodann wurde die von der *mittlern* Belastungslinie ee begrenzte Ansichtsfläche des Bogens zwischen den Lotrechten des Kämpfers und des Scheitels in neun lotrechte Streifen zerlegt, deren Schwerlinien 1 bis 9 eingezeichnet und in ihrer Länge gemessen. Das gab die Unterlagen zur Darstellung des *ersten* Kraftteckes (O_1), mit dessen Hilfe die Schwerlinie der Bogenfläche, die durch s_1 verläuft, festgestellt worden ist. Vgl. das zugehörige Seileck S_1 oben in Fig. 34. Damit wäre der Punkt s'_1 gefunden, in welchem Kämpferkraft und Bogenkraft angreifen, deren Größen darauf in dem mit dem Pole O'_1 gezeichneten Kraftecke abgegriffen werden konnten. Es ergab sich (durch Abgreifen):

$$H_1 = 80 \text{ t}$$
$$K_1 = 154 \text{ t}.$$

Danach berechnet sich die Druckspannung (vorläufig)

$$\text{im Scheitel mit } \frac{80000}{75 \cdot 100} = 10{,}7 \text{ atm}$$
$$\text{am Kämpfer - } \frac{154000}{130 \cdot 100} = 11{,}8 \text{ atm.}$$

Die mit Hilfe des Poles O'_1 punktiert gezeichnete Mittelkraftlinie $m'm'$ fällt in der Bogenmitte zu hoch. Deshalb ist versuchsweise eine neue innere Wölblinie angenommen worden, die ungefähr die Mitte zwischen der Parabel und der $m'm'$ hält. Eingezeichnet ist die Versuchslinie nicht, um die Fig. 34 nicht zu sehr zu überlasten, aber das zugehörige *zweite* Krafteck (mit den Polen O_2 und O'_2) ist gezeichnet und ebenfalls die damit erhaltene zweite Mittelkraftlinie $m''m''$, die schon ziemlich genau mit der günstigsten Bogenachse zusammen geht. Dafür ergab sich:

$$H_2 = 73{,}5 \text{ t und } \sigma = \frac{73{,}5}{7{,}5} = 9{,}8 \text{ atm}$$
$$K_2 = 144{,}0 \text{ t und } \sigma = \frac{144}{13} = 11{,}1 \text{ atm.}$$

Schließlich wurde auf der rechten Bogenhälfte die innere Wölblinie endgültig festgelegt. Sie ist ein Korbbogen, wie dargestellt, mit drei verschiedenen Halb-

messern gezeichnet. Zur Nachprüfung wurde dann noch ein *letztes* Krafteck (mit den Polen O_3 und O'_3) gezeichnet und dafür die Ansichtsfläche des Bogens in 13 Streifen geteilt, so daß diese mit Ausnahme von Streifen 13 genau 1 m breit sind. Die Schwerlinie $s_3 s'_3$ (für mittlere Belastung) wurde zweimal bestimmt, wobei die beiden Pole O_3 in der Geraden pp lotrecht untereinander liegen, so daß das Schneiden der zusammengehörigen Seileckseiten auf der lotrechten Polarachse $p'p'$ nachgeprüft werden konnte (I. **57**, a).

Die Bogenachse (als Seileck dargestellt) erwies sich danach als ausreichend genau überall in der Mitte des Bogens liegend. Für sie ergibt sich:

$$H_3 = 73 \text{ t}$$

und

$$K = 146 \text{ t},$$

also Werte, die von den mit Hilfe des Kraftecks O_2 berechneten nur verschwindend abweichen.

2. Es folgt jetzt die *Darstellung der Mittelkraftlinie für die ungünstigste einseitige Vollbelastung*, um zu sehen, ob diese im gefährlichsten Querschnitte m etwa außerhalb des Kernes zu liegen kommt und wie groß, wenn dies der Fall wäre, dort die *größte Zugspannung* ausfällt. Die hier zugehörigen Linien sind *rot* gezeichnet.

Der gefährlichste Querschnitt wurde *in der Mitte eines Bogenschenkels* (bei m) angenommen (nach **41**, b des II. Bandes), die zugehörige gefährlichste Lastlage erhält man durch Festlegen der Lastscheide. Dazu war es nur nötig, den Schnittpunkt g der Geraden bm und ac aufzusuchen. Bis dahin wird, vom Kämpfer a aus gerechnet, die Vollast reichen müssen.

Um das *rot* dargestellte Krafteck mit dem Pole O_4 (Fig. 35) genau zu erhalten, wurden die Schwerlinien der Mittelkräfte R_a und R_b der linken und rechten Bogenhälfte rechnerisch festgelegt, wozu die Zahlenwerte aus den vorherigen Berechnungen zu Gebote standen. Für die *mittlere* Belastung war gefunden worden:

Schwerpunktsabstand von der betreffenden Kämpferlotrechten
ab gerechnet . . . . = 4,7 m.

Daraus folgen die beiden neugesuchten Schwerpunktsabstände rechts und links

$$x_{0r} = \frac{63{,}45 \cdot 4{,}7 - 9{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot \left(\frac{9{,}5}{2}\right) + 3 \cdot 0{,}4\,(12{,}5 - 1{,}5)}{60{,}85} = 4{,}82 \text{ m}$$

$$x_{0l} = \frac{63{,}45 \cdot 4{,}7 + 12{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot \left(\frac{12{,}5}{2}\right)}{68{,}45} = 4{,}81 \text{ m}.$$

Das Krafteck O_4 konnte danach in bekannter Weise (I. **59**) gezeichnet werden. Die mit seiner Hilfe in der rechten Bogenhälfte gezeichnete Mittelkraftlinie bleibt im gefährlichsten Querschnitte bei *m innerhalb des Kernes*, soweit dies in der Fig. 34 bei dem kleinen Maßstabe ihrer Darstellung überhaupt noch erkannt werden kann. Es empfiehlt sich, die Lage der *roten* Mittelkraftlinie *rechnerisch nachzuprüfen*, um nötigenfalls noch Änderungen in den bisherigen Bogenstärken vorzunehmen.

Es ist (von b aus gemessen)

$$x_m = 6{,}25 \text{ m}$$

gemacht worden. Aus der Fig. 34 abgegriffen, wurde

$$y_m = 6{,}65 \text{ m}.$$

Nach erfolgter Festlegung der Gestalt des Korbbogens könnte y_m (bei gegebenen Krümmungshalbmessern der innern Wölblinie) auch berechnet werden. Dabei ist die Stützweite = 25 m und der Pfeil = 8,1 m einzusetzen.

Nach der Gl. (90a) des II. Bandes S. 191 erhält man danach den Abstand z der Lastscheide aus

$$\frac{z}{l-z} = \frac{2 \cdot xf}{yl}$$

mit

$$z = 9{,}5 \text{ m}.$$

Damit sind die Unterlagen zur Berechnung der *Einflußfläche* F_e des Momentes M_m gegeben. Man erhält nach Gl. (89) des II. Bandes S. 191

$$F_e = 6{,}25\left[9{,}5 - \left(\frac{25 + 6{,}25}{2}\right) + \frac{(25 - 9{,}5)\,12{,}5}{2 \cdot 9{,}5}\right] = 25{,}62 \text{ m}^2.$$

Weil für die *mittlere* Belastung das Moment überall gleich Null ist, so braucht die Einflußfläche nur noch mit $\pm q/2$ links, und $\mp q/2$ rechts belastet zu werden (II. S. 188). Das gibt dann

$$\pm M_m = 25{,}62 \cdot 0{,}4 \cdot 2 \cdot 100 = 2050 \text{ cm t}.$$

Um den Abstand der Längskraft P_m vom Schwerpunkte m genau feststellen zu können, ist es nötig P zu berechnen. Das könnte nach der Gl. (66) des II. Bandes S. 168 geschehen. Wir beschränken uns hier aber darauf, die Größe von P_m aus dem Kraftecke O_4 abzugreifen. Dazu wurde auf die Verlängerung der Fuge m von O_4 aus eine Senkrechte $O_4 k_1$ gefällt. Deren Endpunkt fiel *zufällig* mit dem Krümmungsmittel k_1 zusammen. Das gab

$$\overline{O_4 k_1} = P_m = 91{,}0 \text{ t}.$$

Für den Abstand v der Längskraft erhält man danach

$$v = \frac{M_m}{P_m} = 22{,}5 \text{ cm}.$$

Die Bogenstärke d_m ist in m vorläufig auf 108 cm bemessen worden. Der Stützpunkt von P_m fällt also stark außerhalb des Kernes, so daß je nach der Lage der Verkehrslast sowohl am obern als auch am untern Rande *Zug*spannungen zu erwarten sind. Die positive Randspannung σ_u berechnet sich aus

$$\sigma_u = \frac{M_k}{F \cdot k} = \frac{P_m\left(v - \frac{d_m}{6}\right)}{F \cdot \frac{d_m}{6}} = \frac{6 \cdot 91000\left(22{,}5 - \frac{1}{6} \cdot 108\right)}{108 \cdot 100 \cdot 108} = 2{,}05 \text{ atm}.$$

Sollte das in einem besonderen Falle nicht für zulässig erachtet werden, so müßten die Gewölbestärken entsprechend vergrößert werden usw. Die negative Randspannung σ_o beträgt

$$\sigma_o = \frac{6 \cdot 91000\left(22{,}5 + \frac{1}{6} \cdot 108\right)}{108 \cdot 100 \cdot 108} = 19 \text{ atm}.$$

Im Querschnitte m wäre danach, bei einer vorausgesetzten Druckfestigkeit der Wölbsteine von 300 atm, die Sicherheit etwa eine 15fache. Mindestens ebenso hoch wird sie im Scheitel und an den Kämpfern sein, falls die Mittelkraftlinie dort die nach der Elastizitätstheorie zu erwartenden Lagen annimmt.

b. Berechnung von Fugen- und Bodendrücken. Das Hauptgewölbe der vorigen Aufgabe stützt sich auf ein Widerlager, das sich an die Felsenwand der Schlucht lehnt und dessen Wand mit zwei übereinander liegenden kleinern Kreisgewölben (von 8 m und 6 m Lichtweite bei überall gleicher Stärke von 50 cm) durchbrochen ist.

Aufgabe. Es sind zu berechnen: 1) *Scheitel- und Kämpferdrücke, die in den beiden kleinern Gewölben aus dem Eigengewichte entstehen.* 2) *Der Bodendruck in der Widerlagssohle hi, wobei die Einflüsse der Mittelkraftlinien der kleinern Gewölbe zu berücksichtigen sind.*



1. Die Kraftecke O_5 und O_6 haben zum Festlegen der Schwerlinie der Mittelkräfte V_5 und V_6 der Gewölbelasten gedient, so daß für beide kleinern Gewölbe die Richtungen und dadurch auch die Größe von Bogenkraft und Kämpferkraft aufgetragen werden konnten. Durch *Abgreifen* wurde erhalten:

$$V_5 = 20{,}4 \text{ t}; \quad V_6 = 11{,}0 \text{ t}.$$

Daraus:

$$H_5 = 13{,}0 \text{ t}; \quad K_5 = 24{,}0 \text{ t}$$
$$H_6 = 8{,}5 \text{ t}; \quad K_6 = 13{,}5 \text{ t}.$$

Die gesuchten Fugendrücke sind danach

	im Scheitel	am Kämpfer
oben	$\frac{13000}{5000} = 2{,}6$ atm;	$\frac{24000}{5000} = 4{,}8$ atm
unten	$\frac{8500}{5000} = 1{,}7$ atm;	$\frac{13500}{5000} = 2{,}7$ atm.

Dazu kämen noch die Fugendrücke aus der Verkehrslast, die aber unberücksichtigt bleiben sollen.

2. R sei die Mittelkraft aus den Einflüssen des Hauptgewölbes und der beiden Nebengewölbe. Dann wird R in der Sohle hi am ungünstigsten zu liegen kommen, wenn der Einfluß der Nebengewölbe so klein wie möglich ist. Deshalb wäre es wohl zulässig, hier in den kleinen Gewölben *Minimal*-Stützlinien *zwischen den Kernlinien* zu zeichnen, unter der Voraussetzung, daß eine noch *höhere* Lage von H_5 und H_6 als unwahrscheinlich außer Betracht bleiben muß. Täte man dies, so müßte der Stützpunkt n der Mittelkraft R etwas mehr nach rechts fallen, als es geschieht, wenn die Stützlinien in den Nebengewölben durch die Scheitel- und Kämpferpunkte ihrer Bogen*achse* gelegt werden, wie das in den Fig. 38—39 geschehen ist. Wie gesagt, eine solche Einführung der *Minimal*-Stützlinie böte im allgemeinen eine etwas größere Sicherheit. Verfasser ist aber nach seinen Erfahrungen der Ansicht, daß man aus Gründen der Sicherheit der Minimal-Stützlinien nicht bedarf. Deshalb sind in den Fig. 38—39 die Angriffspunkte von Bogenkraft und Kämpferkraft in die Bogenachse gelegt.

Welche Mittelkraftlinie im Widerlager des Hauptbogens die ungünstigste für den Bodendruck sein wird, läßt sich im allgemeinen nicht entscheiden. Das muß ausprobiert werden. Jedenfalls ist dabei zu untersuchen, wie groß der Bodendruck ausfällt, wenn das Hauptgewölbe *voll* belastet ist und die Strecken des Widerlagers und der Nebengewölbe nur Eigengewicht zu tragen haben. Andere Möglichkeiten sollen weiterhin besprochen werden.

Bei Vollbelastung des Hauptgewölbes ergibt sich Bogenkraft und Kämpferkraft aus Größe und Angriffspunkt der Mittelkraft R_a des *roten* Kraftecks ρ_4. Die Kämpferkraft K ist mit

$$K = 164 \text{ t}$$

abgegriffen und ihre Richtung in b angetragen worden. Widerlager und Nebengewölbe wurden in die Streifen 1 bis 10 und 11 bis 16 eingeteilt. In welcher *Reihenfolge* die Streifengewichte mit K, K_5 und K_6 zusammengesetzt werden, ist (nach I. **54**, a) gleichgültig. Es wurden in dem Kraftecke der Fig. 39 zusammengesetzt:

K	mit den Streifengewichten	10	und 9
K_5	- - -	7	- 8
K_6	- - -	15	- 16.

Die mit Hilfe des Kraftecks der Fig. 37 gezeichnete Mittelkraftlinie an des Hauptbogens trifft in n_5 die Mittelkraft R_5 des obern, in n_6 diejenige des untern Nebengewölbes, so daß die Mittelkraft R aller Kräfte schließlich die Sohle hi im Stützpunkte n schneidet.

Die Sohle ist 510,0 cm breit. Ihre Kernweite (I. **112**) ist also 85 cm. Der Abstand zwischen n und dem Kernpunkte i' mißt fast genau 100 cm. Die lotrechte Seitenkraft von R ist aus dem Kraftecke der Fig. 39 mit

$$V = V_5 + V_6 + (7 + 8 + 9 + 10 + 15 + 16) = 330 \text{ t}.$$

Die *Randspannung* in der Sohlenkante i ist also

$$\sigma_i = \frac{330000 \cdot 100}{510 \cdot 100 \cdot 85} = 7{,}6 \text{ atm}.$$

Einen solchen Druck kann der *Fels*boden mit Sicherheit tragen.

Ob nun bei irgend einer *einseitigen* Vollbelastung des Hauptbogens der Stützpunkt n noch weiter nach rechts fallen und dabei σ_i größer als der vorberechnete Wert werden kann, wäre zu untersuchen. Dazu eignet sich die *rot* gezeichnete Stellung der Last, für welche alle wichtigen Kraftgrößen bereits bestimmt worden sind. Wie die *roten* Linien im Krafteck der Fig. 35 in Verbindung mit der zugehörigen rot gezeichneten Mittelkraftlinie im Widerlager dartun, rückt allerdings der rote Stützpunkt ein klein wenig über n hinaus. Dafür aber fällt die lotrechte Seitenkraft V der roten Mittelkraft R viel kleiner aus als vorher, so daß eine Erhöhung der berechneten Randspannung σ_i nicht eintritt, wovon man sich durch Rechnung überzeugen kann.

c. Berechnung von Temperaturspannungen.

Aufgabe. Ein Betonbogen ist bei einer Luftwärme von $+10^\circ$ *C. geschlossen worden und zeigt nach erfolgter Beseitigung des Lehrgerüstes eine Parabelachse von*

32 m *Weite und* 4 m *Pfeil. Seine Stärken in Metern sind im Scheitel* 1,00 *und an den Kämpfern* 1,00/cos φ. *Der Bogen erwärmt sich über die Luftwärme von* 10° *C. gleichmäßig bis auf* 24° *C. Die dadurch entstehenden größten Randspannungen sind zu berechnen.*

Die durch die Temperaturerhöhung hervorgerufene Bogenkraft H_t beträgt nach der Gl. (23)

$$H_t = \frac{\alpha t l E}{\int_0^l \frac{y^2 dx}{J \cos\varphi}}.$$

Darin ist für 1 m Bogentiefe zu setzen;

$$J = \frac{1}{12} \cdot 1{,}00 \left(\frac{1{,}00}{\cos\varphi}\right)^3.$$

Das gibt

$$H_t = \frac{\alpha t l E}{12 \int_0^l y^2 \cos^2\varphi \, dx}. \tag{26}$$

Der Nenner dieses Ausdruckes muß, um integriert werden zu können, zunächst als eine Funktion von z dargestellt werden. φ ist der Winkel, den eine Tangente im beliebigen Punkte m mit der X-Achse oder ein Krümmungshalbmesser ϱ mit der Scheitellotrechten einschließt. Schneiden die Richtungen von ϱ und einer durch m gelegten Wagerechten die Scheitellotrechte in den Punkten r und s, so ist bekanntlich die Strecke rs (Fig. 40) für jeden Punkt m unveränderlich, sie ist gleich dem *Parameter* p der Parabel. Es ist also

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{p} \text{ oder da } \cos^2\varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} \text{ ist, so ist } \cos^2\varphi = \frac{p^2}{p^2 + z^2}.$$

Nach der Parabelgleichung ist ferner

$$z^2 = 2p(f - y) = 2pf - 2py$$

und, wenn ϱ_0 der Krümmungshalbmesser im Scheitel ist

$$\frac{1}{\varrho_0} = p = \frac{l^2}{8f} \text{ oder } 2pf = \frac{l^2}{4}$$

daher wird

$$y = \frac{\frac{l^2}{4} - z^2}{2p}.$$

Dies alles eingesetzt gibt für den Nenner

$$N = 12 \int_0^l \frac{\left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)^2 \cdot p^2}{4p^2(p^2 + z^2)} dz = \frac{12}{4} \int_0^l \frac{\left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)^2}{(p^2 + z^2)} dz.$$

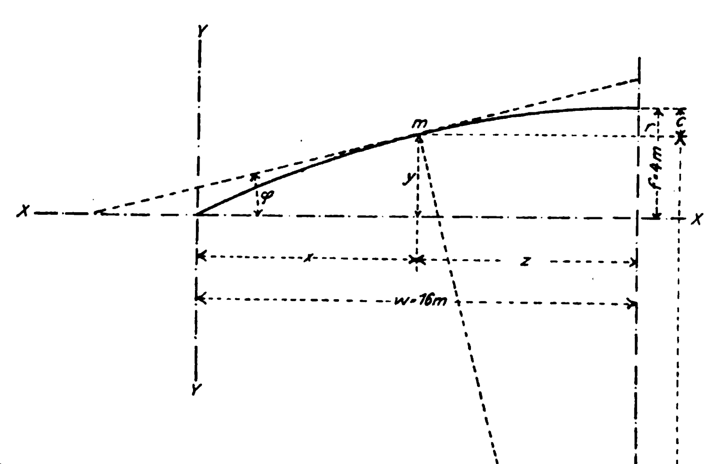
Setzt man nun, da im Bogen Symmetrie vorhanden ist, das Integral in die Grenzen o und w $\left(\text{wobei } w = \frac{l}{2}\right)$ so wird

$$N = \frac{12 \cdot 2}{4} \int^w \frac{(w^2 - z^2)^2}{p^2 + z^2} dz.$$

Quadriert man im Zähler aus, und dividiert mit dem Nenner, so erhält man schließlich

$$N = 6\int_0^w z^2 dz - 6\int_0^w (2w^2 + p^2)\, dz + 6\int_0^w \frac{(w^2+p^2)^2}{z^2+p^2}\, dz$$

$$= 6\,\frac{z^3}{3} - 6\,(2w^2+p^2)\,z + 6\,\frac{(w^2+p^2)^2}{p} \;\text{arctg}\; \frac{z}{p},$$



für $z = l/2 = w$ und für $p = 2w$ wird

$$N = 2w^3 - 36w^3 + 75w^3 \,\text{arctg}\, {}^1/_2\,{}^*$$
$$= 0{,}5\,w^3 = 1024.$$

Man erhält daher

$$H_z = \frac{\alpha \cdot t \cdot l \cdot E}{1024}.$$

Für

$$\alpha = 0{,}00001\,, \quad t = 24^0 - 10^0 = 14^0,$$
$$l = 32\text{ m}\,, \quad f = 4\text{ m}\,, \quad E = 2000000\text{ t/m}^2\,{}^{**},$$
$$p = \frac{l^2}{8f} = \frac{32^2}{8 \cdot 4} = 32{,}0\text{ m},$$

wird

$$H_z = \frac{0{,}00001 \cdot 14 \cdot 32 \cdot 2000000}{1024} = 8{,}75\text{ t}.$$

Daraus folgen (für das *gewichtlos* gedachte Gewölbe) die größten Temperaturspannungen σ_t im Scheitel mit

Fig. 40.

---

* $\text{arc tg}\,\frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right].$

** Nach SPRINGERS Taschenbuch für Bauingenieure S. 413 ist E bei Beton im M.V. 1 : 4, bei 14% Wasserzusatz und $\sigma \sim 20$ atm, ungefähr gleich 2000000 t/m².

$$\sigma_{t_o} = \frac{+H_t\left(f - \frac{100}{6}\right)}{100 \cdot 100 \cdot \frac{100}{6}} = +20{,}13 \text{ atm.}$$

$$\sigma_{t_u} = \frac{-H_t\left(f + \frac{100}{6}\right)}{100 \cdot 100 \cdot \frac{100}{6}} = -21{,}88 \text{ atm.}$$

Weil unter normalen Verhältnissen die aus der *Belastung* herrührende Bogenkraft *ober*halb der Bogenachse angreift, so folgt, daß infolge der Erwärmung des Gewölbes die Mittelkraftlinie im Scheitel *sinkt*, denn am obern Rande sind die Temperaturspannungen positiv, am untern Rande dagegen negativ. Weiter folgt, daß es zweckmäßig sein würde, das Gewölbe möglichst *bei niedriger Luftwärme zu schließen*, weil dann bei Temperaturänderungen im Scheitel *mehr ein Sinken* als ein Heben der Mittelkraftlinie, also mehr eine Verminderung als eine Vermehrung der Randspannungen zu erwarten wäre.

Berechnungen von Temperaturspannungen, bei denen das Nennerintegral auf graphischem Wege (mit Hilfe eines besonderen Verfahrens) dargestellt wird, sind im zweiten Abschnitte der 2. Hälfte dieses Bandes zu vergleichen.

d. Das Nachprüfen der günstigsten Bogenachse durch Einflußlinien.

1. *Aufgabe*[3]. Das Gewölbe einer *Eisenbahnbrücke* (Fig. 41) hat folgende Abmessungen und Gewichte:

Scheitelstärke = 0,8 m; Kämpferstärke = 1,1 m; lichte Weite l_0 = 18,0 m; lichte Pfeilhöhe f_0 = 2,25 m. Es ist mit Sand von 1,8 t/m³ Gewicht 0,6 m hoch über dem Gewölbescheitel überschüttet. Das Gewölbe wiegt 2 t/m³. Für die *Verkehrslast* wurde eine Belastungshöhe von 1,2 m (gleich 2,4 t/m) angesetzt.

Es sollen die Fugenspannungen im Scheitel, im Kämpfer und in der überhaupt gefährlichsten Fuge (die genau genug in der Mitte zwischen Scheitel und Kämpfer anzunehmen ist) bestimmt werden, und zwar

mit Hilfe einer Mittelkraftlinie für die gefährlichste Lage der Verkehrslast,
mit Hilfe von Einflußlinien.

Dabei ist die Gewölbeachse derart festzulegen, daß sie mit der für eine mittlere Belastung gezeichneten Mittelkraftlinie zusammenfällt (**2** a).

2. *Darstellung der günstigsten Bogenachse.* Fig. 41 (rechts) stellt die wirkliche Brückenanordnung dar; auf der linken Seite der Figur sind die wirklichen Höhen auf die *Belastungshöhen* zurückgeführt, wobei das Einheitsgewicht des Gewölbestoffes maßgebend war. Betrachtete Gewölbetiefe gleich 1 m. *Die Gestalt der inneren Wölblinie wurde vorläufig angenommen* und die Belastungsfläche (links) in neun Streifen von je 1,0 m und einen Streifen von 0,275 m Breite geteilt. Nachdem darauf das *Eigengewicht* jedes Streifens — einschließlich des darüberliegenden Gewichtes der halben Verkehrslast von 1,2 t/m² — berechnet und die Angriffs-

[3] Nach dem »Taschenbuch für Bauingenieure«. SPRINGER, Berlin. 1911, S. 396.

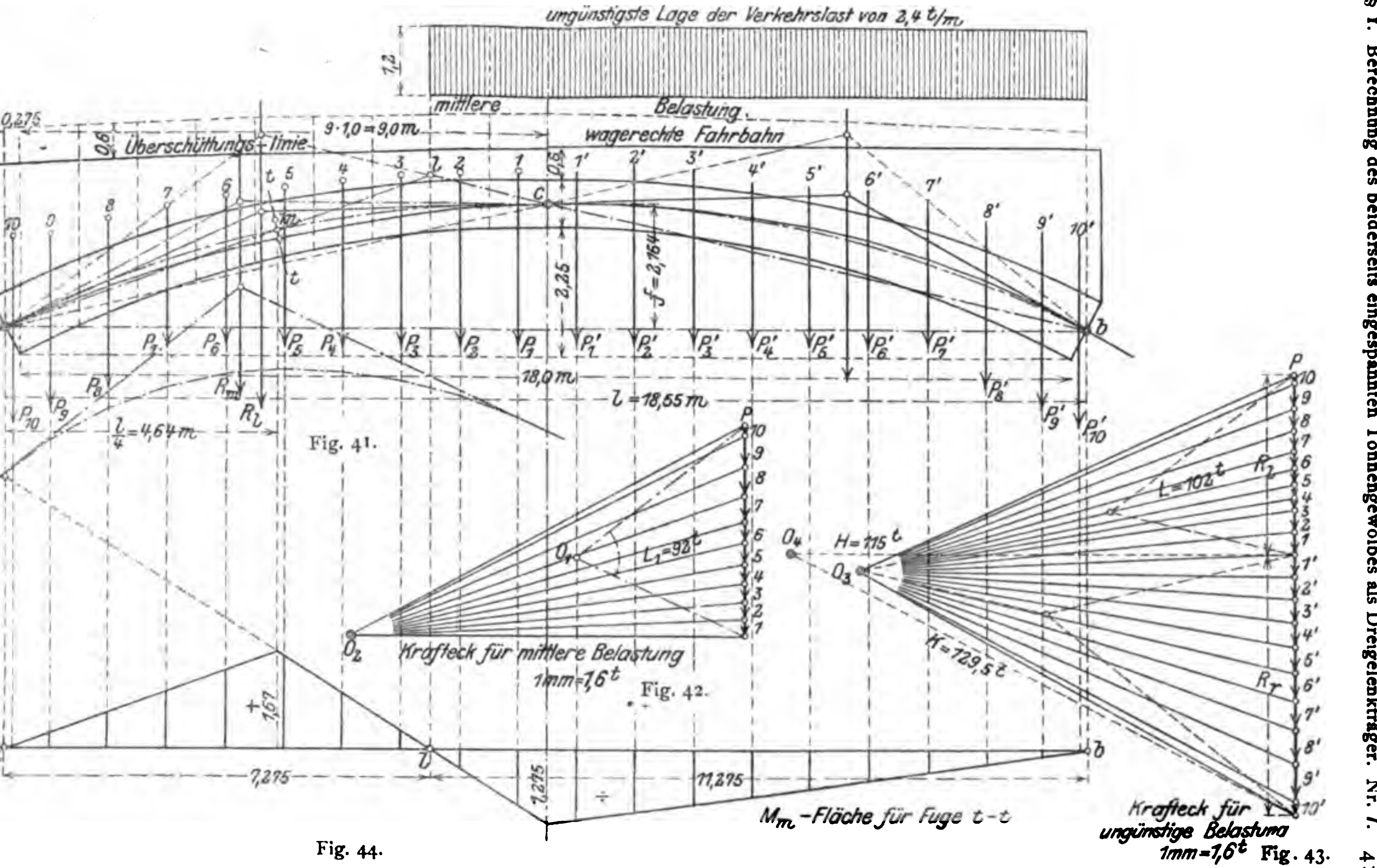


Fig. 41.

Fig. 42.

Fig. 43.

Fig. 44.

linien dieser Lasten festgestellt waren, konnte zwischen den Lastrichtungen durch den Scheitel c und den Kämpferpunkt a der Bogenachse ein Seileck gezeichnet werden, das zuerst noch nicht mit der Bogenachse zusammenfiel. Durch Abändern der Gestalt der inneren Wölblinie wurden schließlich die Gewichte und Angriffslinien der Streifen derart abgestimmt, daß das mit dem Krafteck der Fig. 42 gezeichnete Seileck sich genau genug mit der durch die Punkte a, b, c verlaufenden Bogenachse deckte. Die endgültigen Streifengewichte ergaben sich darauf, wie in der Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 1. Streifenlast für Eigengewicht und Verkehr in t.

Streifenlasten der Fig. 41		Für Eigengewicht E	Für die mittlere Belastung $E+\frac{1}{2}V$	Für Eigengewicht und volle Verkehrslast $E+V$	Streifenlasten der Fig. 41		Für Eigengewicht E	Für die mittlere Belastung $E+\frac{1}{2}V$	Für Eigengewicht und volle Verkehrslast $E+V$
links	rechts	t	t	t	links	rechts	t	t	t
P_{10}	P'_{10}	1,66	2,32	2,98	5	5'	3,56	4,76	5,96
9	9'	6,10	7,30	8,50	4	4'	3,18	4,38	5,58
8	8'	5,28	6,48	7,68	3	3'	2,90	4,10	5,30
7	7'	4,58	5,78	6,98	2	2'	2,73	3,93	5,13
6	6'	4,02	5,22	6,42	1	1'	2,68	3,88	5,08

3. *Lastscheide und Einflußlinie des Momentes M_m für den überhaupt gefährlichsten Gewölbequerschnitt bei tt.* Die *Lastscheide* führt durch den Schnittpunkt l der Kämpferkraftrichtungen K_{bc} und K_{am} (Fig. 41). Damit ist die *Einflußfläche* für M_m (Fig. 44) und die gefährlichste Lage der Verkehrslast für $+M_m$ und $\div M_m$ gegeben. Im Krafteck der Fig. 43 sind die Streifengewichte für Eigengewicht zwischen a und l, sowie für Eigengewicht und volle Verkehrslast zwischen l und b aufgetragen. Die Mittelkräfte dieser beiden Gewichtsgruppen wurden mit R_l und R_r bezeichnet. Für den wagerechten Abstand x_l von R_l, sowie x_r von R_r ergab sich rechnerisch

$$x_l = \frac{48{,}15 \cdot 4{,}02 + 2{,}0 \cdot 1{,}2\left(9{,}275 - \frac{2}{2}\right) - (9{,}275 - 2{,}0)\, 1{,}2 \cdot \frac{9{,}275 - 2{,}0}{2}}{41{,}49},$$

$$x_r = \frac{48{,}15 \cdot 4{,}02 + 9{,}275 \cdot 1{,}2 \cdot \frac{1}{2}(9{,}275)}{59{,}61},$$

oder

$$x_l = 4{,}38 \text{ m}; \quad x_r = 4{,}13 \text{ m}.$$

Die Nennerwerte 41,49 t und 59,61 t stellen die *Gewichtsummen* der Streifenlasten zwischen a und l, sowie l und b dar. 48,15 t ist das Gewicht der mittleren Belastung in *einer* Gewölbehälfte, 4,02 m ist der graphisch ermittelte Abstand der zugehörigen Mittelkraft von a.

4. *Die ungünstigste Mittelkraftlinie.* Sie wurde auf Grund obiger Gewichtszahlen mit Hilfe des Kraftecks der Fig. 43 mit dem Pole O_3 gezeichnet. Die

größte Abweichung v der Mittelkraftlinie vom Punkte m der Bogenachse wurde aus der Gleichung

$$Pv = M_m$$

ermittelt. Die *Längskraft* P des Schnittes tt konnte aus dem Krafteck der Fig. 43 mit

$$P = 102 \text{ t}$$

abgegriffen werden. M_m ergab sich aus der Belastung der Einflußfläche der Fig. 44 für *Eigengewicht* mit

$$+M_{me} = 24,680 \text{ mt}; \quad -M_{me} = 22,963 \text{ mt},$$

für *Verkehrslast* mit

$$-M_{mv} = \frac{11,275 \cdot 1,275}{2} \cdot 2,4 = -17,21 \text{ mt}.$$

Daraus

$$M_m = -22,963 - 17,21 + 24,68 = -15,49 \text{ mt}$$

und

$$v = \frac{15,49}{102} = 0,152 \text{ m}.$$

Man hätte — wie auf S. 35 geschehen ist — M_m auch aus der Belastung mit $\pm q/2$ und $\mp q/2$ berechnen können.

5. *Fugendrücke.* Die *Gewölbestärke im Schnitte tt* berechnet sich mit Hilfe der in eine Gerade gestreckten Bogenachse zu

$$d = 0,953 \text{ m}.$$

Ferner berechnet man: *Querschnitt* $F = 1,0 \cdot 0,953 = 0,953 \text{ m}^2$; *Widerstandsmoment* $W = \frac{1 \cdot d^2}{6} = 0,1514 \text{ m}^3$ und die *Kernweite* $k = \frac{0,953}{6} = 0,159$ m. Danach liegt also der Angriffspunkt der Längskraft P noch *innerhalb des Kerns*. Die größte Druckspannung erhält man aus dem

*Schwerpunkts*moment: $\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_m}{W} = \frac{102}{0,953} + \frac{15,49}{0,1514} = 209,3 \text{ t/m}^2$,

*Kern*moment: $\sigma = \frac{M_k}{F \cdot k} = \frac{102\,(0,152 + 0,159)}{0,953 \cdot 0,159} = 209,3 \text{ t/m}^2$.

Die *größten Druckspannungen im Scheitel und am Kämpfer* treten für *Vollbelastung* ein. Im Krafteck der Fig. 43 ist für diese Belastung ein neuer Pol O_4 festgelegt, mit dessen Hilfe die Bogenkraft $H = 115$ t und die Kämpferkraft $K_a = K_b = 129,5$ t abgegriffen worden sind. Es berechnen sich ferner

im *Scheitel*: $F = 0,8 \text{ m}^2$; $\sigma = \frac{115}{0,8} = 144 \text{ t/m}^2 = 14,4$ atm;

im *Kämpfer*: $F = 1,1 \text{ m}^2$; $\sigma = \frac{129,5}{1,1} = 118 \text{ t/m}^2 = 11,8$ atm.

6. *Nachprüfung der Lage der Bogenachse.* Wenn die Bogenachse wirklich die günstigste ist, so muß für die *mittlere Belastung* in jedem Querschnitte das positive gleich dem negativen Momente ausfallen. Ob dies im vorliegenden Falle genau genug zutrifft, ist mit Hilfe der für den Schnitt tt gezeichneten Einflußfläche (Fig. 44) zu untersuchen. Man erhält

für 1/2 *Verkehr*: $+M = \frac{7,275 \cdot 1,67}{2} \cdot 1,2 = +7,29$ mt,

$-M = \frac{11,275 \cdot 1,275}{2} \cdot 1,2 = -8,63$ mt,

für *Eigengewicht* + 1/2 *Verkehr*: $\left\{ \begin{array}{l} +M = 24,68 + 7,29 = +31,97 \text{ mt}, \\ -M = 22,963 + 8,63 = -31,593 \text{ mt}. \end{array} \right.$

Es bleibt also ein Unterschied von 31,97 — 31,593 = 0,38 mt. Die Längskraft P ist nach dem zugehörigen Kraftecke der Fig. 42 gleich 92 t. Das gibt im Schnitte *tt* zwischen der Mittelkraftlinie und der Bogenachse eine Abweichung v' von

$$v' = \frac{0,38}{92} = 0,004 \text{ m} = 4 \text{ mm}.$$

Wäre der Punkt m nicht annähernd, sondern *genau* festgelegt worden, so hätte $v' = 0$ werden müssen. Um eine solche Genauigkeit zu erreichen, müßte man die Einflußlinie für M_m durch Probieren so lange abändern, bis $+M = -M$ geworden sind. Praktisch ist aber die obige kleine Größe von v' nicht von Belang.

8. Geschichtliche Rückblicke.

a. Die älteren Theorien bis auf Coulomb.

1. Soweit wie es die Schriften der Griechen und Römer und die erhaltenen Denkmäler ihrer einstigen Kultur erkennen lassen, besaßen die Alten keine Theorie des Gewölbebaues, sie bauten allein nach Erfahrungsregeln. Die Römer benutzten nur den Halbkreisbogen, die theoretisch ungünstigste Gestalt eines Bogens, der Flachbogen scheint ihnen unbekannt geblieben zu sein. Schon aus diesem Grunde verboten sich bei ihnen bedeutende Bogenweiten von selbst. In der Regel baute man in römischen Zeiten keine Gewölbe über 25 m bis 30 m Weite.

Die geistigen Urheber der ältesten steinernen Brücken des Mittelalters waren die Mönchsorden, namentlich Benediktiner und Cisterzienser. Ihnen verdankt man wahrscheinlich auch die Einführung des Flachbogens. Ob die Baumeister der Gotik bereits eine richtige Anschauung über das Spiel der Kräfte im belasteten Bogen besessen haben, ist mit Bestimmtheit nicht zu sagen. Um die Mitte des 15. Jahrhunderts standen zwar schon das Straßburger Münster, der Kölner Dom und die Wiener Stephanskirche, aber die damalige Ingenieurkunst lag nachweislich noch völlig im Banne der römischen Baukunst und das einzigste Werk, das, wenn auch dunkel und lückenhaft, Auskunft über technische Einzelheiten der römischen Bauten gibt, Vitruvs: De Architectura, beeinflußte damals, und auch noch Jahrhunderte später, die Anschauungen der technischen Welt.

2. Die ersten Gewölbetheorien stammen aus Frankreich, dessen theoretisch und praktisch frühreife Ingenieure im Bau von Gewölben bis heute nachahmungswerte Meister geblieben sind. Philippe de la Hire (1640 bis 1718) veröffentlichte die erste Theorie der Kreisbogengewölbe[4]. Er betrachtet nur *das Gleiten* der Wölbsteine aufeinander und findet, daß der Bruch des Gewölbes immer in der Mitte zwischen Scheitel und Kämpfer stattfinden müsse, ferner daß der obere Gewölbeteil als *ein Keil* anzusehen sei, der bestrebt ist, zwischen den

[4] Mémoires de l'académie des sciences. 1712.

beiden Gleitflächen des Scheitels und der Bruchfuge herabzusinken. BELIDOR (1697—1761)[5] wahrte im wesentlichen den von LA HIRE eingenommenen Standpunkt. Auch EYTELWEIN (1764—1848), der große deutsche Ingenieur und erster Direktor der 1799 gegründeten Berliner Bauakademie, beachtet in seiner Statik der Gewölbe nur die Gefahr des Gleitens[6]. Heute findet die damals herrschende Meinung, wonach der Einsturz eines Gewölbes in erster Linie infolge des Gleitens der Wölbsteine aufeinander herbeigeführt wird, keine Anhänger mehr. Denn aus zahlreichen Versuchen über das Gleiten von Steinen ist festgestellt worden, daß selbst bei völlig mörtellosen glatten Fugen der Reibungswinkel φ zwischen Stein und Stein ziemlich groß ist. Gewöhnlich wird für Stein auf Stein $\varphi = 33^\circ$, beim Vorhandensein einer Mörtelschicht $\varphi = 26^\circ$ angenommen. Wählt man also die Fugenrichtungen bei günstiger Bogenachse nur einigermaßen zweckmäßig, so wird der Winkel, den die Mittelkraft mit der Längskraft einer Fuge einschließt, niemals auch nur annähernd obige Größe erreichen. Die Gleitgefahr darf daher in der Regel außer Betracht gelassen werden.

3. Der Erste, der außer dem Gleiten auch das *Kanten* der Steine beim Gewölbeeinsturz untersuchte, war COUPLET[7], weil er aber, wie LAHIRE und BELIDOR den Bruch in der Mitte eines Gewölbeschenkels annahm, so kam er zu unrichtigen Ergebnissen. Bald darauf (1732) stellte DANISY[8] in Montpellier Versuche über den Bruch der Gewölbe an, wobei sich ergab, daß der Einsturz nicht durch Gleiten, sondern durch Kanten erfolgte. BOISTARD[9] wiederholte diese Versuche und wies nach, daß der Bruch immer durch Drehen um die Kanten der zerbrochenen Teile, nie aber durch Gleiten in den Fugen erfolgte. Dabei beobachtete er im allgemeinen fünf Bruchpunkte: in der Scheitelfuge, in *zwei* Punkten zwischen Scheitel und Kämpfer und in den beiden Kämpferfugen, wenn keine Widerlager da waren, sonst in der Sohle der Widerlager (**4**). Die von BOISTARD auf Grund seiner Versuche ausgebildete Theorie wurde von GAUTHEY (1732—1806) in dessen berühmtes Werk über Brückenbau[10] aufgenommen.

b. COULOMB und seine Nachfolger.

1. Als eigentlicher Begründer der Gewölbetheorie gilt heute COULOMB[11], der berühmte Ingenieur und Mathematiker (1736—1806). Aber selbst er stellt noch die Einsturzgefahr infolge des Gleitens mit in den Vordergrund seiner Untersuchungen. Er betrachtet ein als starr vorausgesetztes Wölbstück vom Gewichte V

---

[5] La science des ingénieurs. 1729. In der zweiten, 1830 von NAVIER besorgten Ausgabe findet man bemerkenswerte Anmerkungen von diesem über die Theorie der Gewölbe und des Erddruckes.

[6] EYTELWEIN. Handbuch der Statik fester Körper. I. u. II. Band. 1808. III. Band. 1809.

[7] Mémoires de l'académie des sciences. 1729—30.

[8] LOHMEYER. Theorie der Kreisgewölbe. Crelles Journal für die Baukunst. 18. Band. 1843. S. 208.

[9] Mémoires extraits de la bibliothèque des ponts et chaussées. 2. Band.

[10] Nach dem Tode GAUTHEYS von seinem Neffen NAVIER herausgegeben (1809—1813).

[11] Application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. 1773 abgedruckt in den »Mémoires des savants étrangers de l'Académie de Paris«.

zwischen dem Scheitel c und einer beliebigen Fuge m und entwickelt für die beiden Fälle des Kantens und Gleitens die beiden Gleichgewichts-Bedingungen

$$H_1 = V\frac{x}{y}$$

und

$$H_2 = \frac{V}{\operatorname{tg}(\varphi + \alpha)},$$

wenn x und y Hebelarme von V und der Bogenkraft H_1 in bezug auf m, und α den Reibungswinkel von Stein auf Stein bedeuten. Mit Hilfe der Theorie der Maxima und Minima ermittelte er dann den ungünstigsten Winkel φ einer Fuge mit der Lotrechten. Diesen Winkel nannte er *Bruch*winkel und die zugehörige Fuge *Bruch*fuge.

2. Die Theorie von COULOMB wurde 1820 wesentlich berichtigt und erweitert von AUDOY[12]. Dieser betrachtete die Gewölbe, wie sie es ihrer Gestalt und *physischen Natur* nach wirklich sind, indem er sich dabei auf die Versuche BOISTARDS stützte, nach welchen *eine Gleitgefahr nicht vorliegt*. Im übrigen bestätigt er die Richtigkeit der Rechnungen von COULOMB. Spätere Untersuchungen, namentlich von LAMÉ und CLAPEYRON[13] (1823), NAVIER[14] (1833), GARIDEL[15] (1835) und PETIT[16] (1835) bilden meist erweiterte Anwendungen auf besondere Fälle. Die Arbeit von PETIT findet sich in deutscher Übersetzung in der schon erwähnten geschichtlichen Abhandlung von LOHMEYER (S. 45, Anmerk. 8). PETIT sagt u. a.: »Im standfesten Gewölbe gibt es eigentlich keine Bruchfuge mehr; die Wölbsteine berühren sich nicht mehr an der Kante allein; man muß hier annehmen, daß die obern und die untern Wölbsteine sich der ganzen Länge ihrer Fuge nach berühren und daß nur die Fuge des Schlußsteines, diejenige der Kämpfersteine und gewisse Fugen nahe der Mitte zwischen Scheitel und Kämpfer sich leichter als die andern öffnen werden. Hieraus ergibt sich, daß der Angriffspunkt des Druckes, oder vielmehr die Mittelkraft aus allen Pressungen in der Schlußsteinfuge nicht mehr in der obern Kante, sondern in einem Punkte zwischen dem obern und untern Wölbrande liege. Um diesen Punkt zu finden, müßte man das Gesetz der Pressungen kennen, das für die beiden äußersten Fugen Geltung hat. Dies Gesetz ist uns aber unbekannt.«

NAVIER (1785—1836) erweiterte und bereicherte die Gewölbetheorie namentlich dadurch, daß er zeigte, wie die außer dem Fugenmittel angreifende Längskraft nicht nur blos eine reine Druckspannung — wie man bis dahin annahm — sondern auch eine *Biegungs*spannung verursachen müsse, deren Berechnung auf Grund des Elastizitätsgesetzes, und seiner bekannten Annahmen (I. **42**) möglich sei. Aber bis etwa zur Mitte des 19. Jahrhunderts wurde von dieser wichtigen theoretischen Errungenschaft so gut wie garnicht Gebrauch gemacht, wie weiterhin (unter c) nachgewiesen werden wird.

---

[12] Mémorial de l'officier du génie. 1820. Nr. 4. S. 1—96.
[13] Annales des mines. Bd. 7. 1832.
[14] Application de la mécanique à l'établissement des constructions. 2. Aufl. 1839.
[15] Mémorial de l'officier du génie. Nr. 12. 1835. S. 7—72.
[16] Daselbst S. 72—150.

c. Die graphische Behandlung durch Poncelet.

1. Die erweiterte Theorie Coulombs — die sog. *Kantungs*theorie — bildet auch heute noch ein lehrreiches Mittel, um durch Auftragen der Maximal- und Minimal-Stützlinien die Möglichkeiten des Einsturzes von Gewölben anschaulich zu machen. Das wichtigste graphische Hilfsmittel dabei lieferte Poncelet (1788—186?). Vor ihm hatten zwar Lamé und Clapeyron [17] (1826) schon Kraftecke und Seilecke benutzt, um mit deren Hilfe *Kettenlinien* darzustellen. Es bleibt aber immerhin ein Verdienst Poncelets, diese wichtigsten Hilfsmittel der graphischen Statik zum ersten Male systematisch in den Dienst der Technik gestellt zu haben, nicht allein für den Maschinenbau, sondern besonders auch für die Theorie der Gewölbe und des Erddrucks [18]. Außerdem schrieb Poncelet später eine ausführliche geschichtliche Abhandlung über die Gewölbetheorie [19], worin er bereits die Ansicht aussprach, *daß eine richtige Gewölbetheorie allein auf die Gesetze der Elastizität begründet werden könne.* Brix (1798—1870) hat Poncelets Arbeiten benutzt (1849), um Kettenlinien geometrisch darstellen zu können [20]. Im übrigen blieben Poncelets Arbeiten, sowie namentlich aber die Abhandlungen der genannten Nachfolger Coulombs, wie Audoy, Garidel und Petit lange Zeit nach ihrem Erscheinen in Deutschland noch unbeachtet. Das kam wohl daher, daß die Schriften jener Männer zuerst in Büchern erschienen sind, die im Buchhandel nicht zu haben waren.

2. Gerstner der Ältere (1756—1832), Begründer des polytechnischen Institutes in Prag, dessen »Handbuch der Mechanik« 1831 [21] zuerst erschien und später von seinem Sohne, dem Ingenieur Anton von Gerstner weiter herausgegeben wurde, hat die »*Stützlinie*« in das Gebiet der Gewölbetheorie eingeführt. Vorher hatte Gerstner, als Erster, die Gleichung der sog. *Kettenbrückenlinie* gegeben, d. i. einer Seillinie oder Kettenlinie, die außer dem eigenen *veränderlichen* Gewichte des Seiles oder der Kette auch noch eine *gleichmäßig* verteilte Last einer Brückenfahrbahn und Einzellasten zu tragen hat. Gerstner betrachtete dabei die Kette als einen Körper von überall gleichem Widerstande, der vom Scheitel bis zu den Aufhängepunkten gleichmäßig mit der Achsenkraft wächst. Durch die eingehende Beschäftigung mit dieser Linie mag er wohl auf den Gedanken gekommen sein, mit gleichen mathematischen Hilfsmitteln auch für ein Gewölbe eine Seillinie zu berechnen, indem er dieses in seiner Gleichgewichtslage als ein umgekehrtes Seil betrachtete. So wurde durch Gerstner die »Theorie der Stützlinie« angebahnt. Gerstner legte der Möglichkeit des Gleitens noch Bedeutung bei. Das besagt seine Forderung, wonach die Fugenrichtungen überall *senkrecht* zur Richtung der betreffenden Mittelkraft angelegt werden sollen. Heute dagegen stellt man die Fugenrichtungen in der Regel senkrecht zur *innern* Wölblinie.

---

[17] Journal des Voies de Communication. Petersburg. 1826. S. 35 und 1827, S. 44.
[18] Mémorial de l'officier du génie. 1835. Nr. 12 (Gewölbe) und Nr. 13 (Erddruck).
[19] Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Band 35. 2. Nov. 1852.
[20] Brix. Statik fester Körper 1831. 2. Aufl. 1849.
[21] Als 1. Band. 2. Aufl. von seinem Sohne 1832—34. 3 Bände.

3. Weil in einer wirklichen Seil- oder Kettenlinie die Bogenkraft *Zug*spannungen hervorruft, während die Stützlinie eines Bogens immer *Druck*spannungen erfährt, so nannte man die Stützlinie bald auch »*Drucklinie*«. Allgemeiner und treffender als »Stützlinie« und »Drucklinie« dürfte wohl die heute viel gebrauchte Bezeichnung »*Mittelkraftlinie*« sein, denn eine solche Linie kann für Einzellasten (als Seileck) oder für stetige Lasten (als Seillinie) gezeichnet werden. Für die Berechnung kommt es ja wesentlich nur darauf an, den *Stützpunkt* (I. **64**) einer beliebigen Fuge des Bogens, sowie auch *Größe* und *Richtung* der *betreffenden* dort angreifenden *Mittelkraft* festzulegen. Dies alles liefert aber allein schon die Mittelkraftlinie, mit dem zu ihrer Darstellung benutzten Krafteck, ganz gleich, ob Einzellasten oder stetige Lasten in Frage kommen. Denn im Falle stetiger Lasten bildet für lotrecht gelegte Schnitte die im Stützpunkte der Fuge angreifende *betreffende* Mittelkraft des der Seillinie umschriebenen Seilecks eine Berührungsgerade zur Seillinie (**36**, b und c im II. Bande).

d. Moseley-Scheffler-Schwedler-Hagen.

1. MOSELEY (1802—1872), Professor an der Universität Oxford, der seinen, im Vergleich mit den Franzosen in der Theorie etwas zurückgebliebenen Landsleuten die Arbeiten von NAVIER und PONCELET auf dem Gebiete der Baumechanik vorführte, veröffentlichte auch selbst viele eigene Arbeiten. Darunter war seine Gewölbetheorie, die seinerzeit Aufsehen erregte. Bis dahin (1833) fußten alle Theorien mehr oder minder auf den von COULOMB geschaffenen Grundlagen. Keiner der genannten Forscher trat ernstlich der Frage nahe, *welche der unendlich vielen Mittelkraftlinien die wahre sei*. MOSELEY war der erste, der den Weg zur Lösung dieser Frage beschritt. Um zunächst erkennen zu lassen, wie MOSELEY im übrigen den Standpunkt von COULOMB teilte, bringen wir nachfolgend einen Auszug aus einem seiner Aufsätze, den er vom November 1839 datiert und worin auch die Unterschiede zwischen den Begriffen der »*Stützlinie*« und der »*Mittelkraftlinie*« klar hervorgehoben werden[22]. Es heißt dort[23]:

»Die ganze Frage der Standfestigkeit der Tragwerke erstreckt sich auf die Untersuchung der beiden Bedingungen, daß ein aus geeigneten Steinen (Fig. 45)[24] gebildeter Bau $MKLN$ entweder dadurch aus dem statischen Gleichgewichte kommt, daß gewisse Berührungsflächen (Fugen) aufeinander *gleiten*, oder daß sich die betreffenden Steine um ihre Kanten drehen. Nehmen wir hiernach an, der ganze Bau bestehe aus einer einzigen Reihe von in den Fugen *ohne Mörtel* verbundenen Steinen beliebiger Gestalt, auf welche irgendwelche Druckkräfte wirken und wovon 1—2 eine beliebige Fuge ist. Weiter sei aA die Mittelkraft aller auf den Teil M—N—2—1 wirkenden Kräfte und ferner werde angenommen, die Schnittfläche 1—2 ändere sich nach Lage und Gestalt derart, daß sie nach und nach den in unserer Figur dargestellten Fugen 3—4, 5—6, 7—8, 9—10 usw.

[22] Nach RÜHLMANN, Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik. 1885. S. 443.

[23] Enthalten in der von JOHN WEALE veranstalteten Ausgabe des Sammelwerkes: The theorie, practice and architecture of bridges«, London 1843 im Bande I unter der Überschrift: »Theoretical and practical papers on bridges«.

[24] Die Figur ist der von MOSELEY selbst gegebenen nachgebildet.

entspreche. Dann wird man, wie *aA* für 1—2, für die verschiedenen aufeinander folgenden Schnittflächen jetzt *bB*, *cC*, *dD*, *eE* als Mittelkräfte annehmen können.

In jeder dieser Lagen wird die betreffende Mittelkraft entweder innerhalb oder außerhalb des Tragwerkes liegen. Liegt sie außerhalb, d. h. ist *a'A'* die Mittelkraft und erfolgt ihr Durchgang im Punkte *a'* der nach innen verlängerten Fuge 1—2, so wird der in der Richtung *a'A'* tätige Druck offenbar bestrebt sein, den Teil *N*—*M*—1—2 um die Kante 2 der Fuge 1—2 zu drehen. Selbstverständlich würde das Drehen um die äußere Kante 1 geschehen, falls *a"A"* die Richtung der Mittelkraft wäre, sowie zweifellos, wenn *aA* diese Richtung wäre, weder um die Kante 1 noch um die Kante 2 ein Drehen erfolgen könnte.

Stellt man sich jetzt die Berührungsflächen der einzelnen Steine einander unendlich nahe liegend vor, so werden ihre Durchgangspunkte *a*, *b*, *c*, *d* usw. eine Linie bilden, die ich »*Widerstandslinie* (Line of Resistance)« nenne[25]. Daß man durch Auffinden dieser Linie in einem bestimmten Tragwerke die *erste* der vorbezeichneten Gleichgewichtsbedingungen ermitteln kann, bedarf keiner besondern Erörterung.

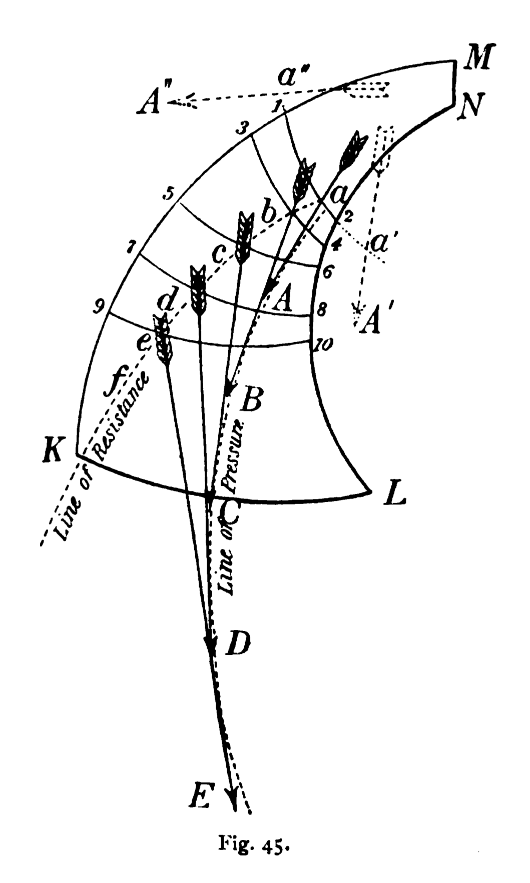


Fig. 45.

Was die *zweite* Bedingung, die Beurteilung der Standfestigkeit in Hinsicht auf ein mögliches *Gleiten* der Bausteine aufeinander anlangt, so wird das betreffende Gleichgewicht jedenfalls eintreten, sobald die Richtung der Mittelkraft überall innerhalb des sog. Reibungskegels verbleibt. Zur weiteren Erläuterung denken wir uns die Linie *ABCDE* als geometrischen Ort aller aufeinander folgenden Durchgangspunkte der Mittelkräfte *aA*, *bB*, *cC*, *dD* usw. Diese Linie nenne ich *Drucklinie* (Line of Pressure). Ihre geometrische Gestalt läßt sich unter den nämlichen Umständen bestimmen, wie die »Widerstandslinie«. Eine Gerade *cC*, die vom Punkte *c*, wo die Widerstandslinie *abcd* die Fuge 5—6 schneidet, als Tangente an die Drucklinie *ABCD* gezogen wird, bestimmt sonach die *Richtung* der in der Fuge 5—6 angreifenden Mittelkraft. Liegt diese Mittel-

---

[25] Das ist die sog. *Stützlinie* (I. **64**, b).

kraft innerhalb des Reibungskegels, so wird *kein Gleiten* des Baues in der zugehörigen Fuge eintreten, tritt sie jedoch heraus, so wird das Gleiten beginnen[26].«

Nach meinen Erörterungen (unter a) ist es klar, daß einerseits MOSELEYS »Drucklinie« gleichbedeutend mit unserer heutigen »Mittelkraftlinie« ist und anderseits, daß es der Darstellung einer »Stützlinie« nicht bedarf, weil alle notwendigen Berechnungsstücke, wie Lage des Stützpunktes, einschließlich Richtung und Größe der Mittelkraft einer Fuge *allein aus der Mittelkraftlinie zu erhalten sind.* Man erkennt aus obigem Auszuge auch, wie MOSELEY sonst im wesentlichen noch auf den von COULOMB vorgezeichneten Grundlagen der Gewölbetheorie steht. An anderer Stelle hat er jedoch insofern Neues gebracht, als er über die *Lage der Mittelkraftlinie* im Gewölbe eine bestimmte Theorie aufstellte.

2. MOSELEY stützt seine Theorie auf »a new principle in statics«, wie er sagt. Er nennt es »Principle of least Pressure« oder *Satz vom kleinsten Widerstande*[27]. Er faßt den Satz, den er mathematisch beweist[28], in folgende Worte: »Wenn eine Anzahl von Kräften mit einem Systeme von Widerständen in Gleichgewicht ist, dann sind diese solche, deren Summe ein *Minimum* ist; jeder Widerstand angesehen als eine Funktion der positiv genommenen Koordinaten seines Angriffspunktes, und den Bedingungen unterworfen, die das Gleichgewicht des Ganzen fordert.« Bei der Anwendung des Satzes betrachtet MOSELEY das Gewölbe nach erfolgtem Schlusse im Scheitel, im Augenblicke, wo das bis dahin tragende Lehrgerüst entfernt und der Bogen seiner Last überlassen wird. Dies sog. *Ausrüsten* erfolgt ganz allmählich, so daß der Bogen auch allmählich erst seine ganze Last aufnimmt. Dabei muß in entsprechendem Maße auch die Bogenkraft wachsen. *Nach Moseley wächst diese nur so lange, bis sie gerade groß genug ist, um das Gewölbe zum Alleintragen zu befähigen.* Trägt also das Gewölbe, so entsteht eine Stützlinie, die der kleinsten Bogenkraft entspricht.

Neu an MOSELEYS Betrachtung ist nur der Weg, auf welchem er zu seinem Ergebnis kam. Das Ergebnis selbst war für die damalige Zeit, wo man den Bogen noch als *starren* Körper ansah, nicht mehr neu. Man kannte bereits die Grenzlagen der Stützlinie (4), aber man übersah, daß in praktischen Fällen die *wahre* Stützlinie niemals durch die *Rand*punkte der Wölbsteine verlaufen kann, denn diese müßten dort sonst unendlich große Spannungen aushalten. Als man den Widerspruch zwischen dem tatsächlichen Verhalten der Steine und den rein mathematischen Ergebnissen der Kantungstheorie erkannte, glaubte man ihn zuerst

---

[26] Eine rechnerische Darstellung der »Line of Resistance« und »Line of Pressure« hat MOSELEY im 6. Bande der »Cambridge philosophical transactions« niedergelegt.

[27] Der Satz ist eigentlich nichts anderes als das zuerst von MAUPERTUIS (1698—1759) aufgestellte, in den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746, S. 265 veröffentlichte »principe de la moindre action«, das auch LAGRANGE zur Lösung schwieriger Aufgaben der Dynamik angewendet hat. RÜHLMANN. Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik. 1885. S. 209—210.

[28] London philosophical Magazine. 1833. Band III. Juli—Dezember S. 285. — Vgl. auch MOSELEY. Theoretical and practical papers on bridges (1839). Vol. I des von JOHN WEALE herausgegebenen Sammelwerkes: The Theorie, Practice and Architecture of Bridges etc. London. 1843.

in folgender Art lösen zu können. Man nahm auf Grund von MOSELEYS Theorie an, die Stützlinie werde in Wirklichkeit soweit von den innern und äußern Rändern des Bogens entfernt bleiben, als es unbedingt nötig sei, um die zum Aufrechterhalten des Gleichgewichtes erforderliche kleinste Bogenkraft zu erzeugen, so daß dabei die Randspannungen innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben. Die Unhaltbarkeit einer solchen gewagten Annahme liegt heute auf der Hand: die wahre Stützlinie rückt zwar selbsttätig weit genug vom Rande ab, das rührt aber allein vom *elastischen* Verhalten der Wölbsteine her und — wie WINKLER in seinen Vorträgen an der Berliner technischen Hochschule gelegentlich bemerkt hat — nicht etwa von der »*Schlauheit*« des Baustoffes.

3. SCHEFFLER, der MOSELEYS vortreffliches Werk »The mechanical principles of engineering and architecture«, erschienen in London 1843, im Jahre 1845 in deutscher Sprache herausgab, hat sich auch der Gewölbetheorie dieses Forschers warm angenommen[29], indem er sie für den praktischen Gebrauch einrichtete und erweiterte. Einen nachhaltigen Erfolg konnte er damit nicht erzielen. Notwendig mußte sich vorerst die Einsicht Bahn brechen, daß allein die *elastischen* Eigenschaften der Wölbstoffe als Grundlage für die Ermittelung der wahren Lage der Mittelkraftlinie dienen können. MOSELEYS und SCHEFFLERS Arbeiten haben aber viel zur Klärung schwebender Fragen der Gewölbetheorie beigetragen und namentlich auch erneuten Anstoß zu wissenschaftlichen Untersuchungen über die *günstigste Gestalt eines Wölbbogens* gegeben.

HAGEN (1797—1884), der weltberühmte Verfasser des »Handbuch der Wasserbaukunst«, als Oberlandesbaudirektor die erste technische »Exzellenz« des Königreichs Preußen, hat im Jahre 1844 seine Ansichten über die Form und Stärke der Gewölbe in einer besondern Schrift niedergelegt[30]. Er führt die Stützlinie durch die Mitte der Scheitel- und Kämpferfuge und verlangt eine Verbesserung der Form oder der Belastung des Gewölbes an denjenigen Stellen, wo die Stützlinie den Rändern zu nahe komme. In den neuern Bearbeitungen seiner Schrift (1862 und 1874) gründet er seine Berechnungen auf das *Gesetz der günstigsten Beanspruchung* und ermittelt dabei die diesem am besten entsprechende Lage der Stützlinie. Das ist nach ihm eine Stützlinie, die derart im Bogen liegt, *daß die lotrechte Projektion ihres kleinsten Abstandes vom innern oder äußern Gewölberande* sowohl im Scheitel als auch in den Bruch- und Kämpferfugen die gleiche wird. Setzt man Form und Stärke des Gewölbes, sowie auch seine Belastungslinie mit einer solchen Stützlinie in Einklang, so erhält man die geringst möglichen Fugendrücke.

SCHWEDLER (1823—1895), der 38 Jahre lang dem preußischen Ministerium der öffentlichen Arbeiten angehörte, von 1868 ab als vortragender Rat, war einer der Ersten seiner Zeit auf den theoretisch-praktischen Gebieten des Eisenbaues[31].

---

29 SCHEFFLER. Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. 1857.

30 HAGEN. Über Form und Stärke gewölbter Bogen. 1844. Davon erschien 1862 eine neue Bearbeitung und 1874 deren 2. Auflage.

31 SARRAZIN. JOHANN WILHELM SCHWEDLER. Zeitschr. f. Bauwesen. 1895. S. 9.

Aber auch die Gewölbetheorie hat er durch namhafte Beiträge bereichert. In seiner ersten Arbeit (1859) entwickelt er seine Theorie der Stützlinie und berechnet dabei die Belastungslinien für Kreis- und Korbbogengewölbe, sowie auch die Gewölbeform für wagerecht abgeglichene Belastung[32]. Später (1868 und 1869) veröffentlichte er noch eine bemerkenswerte Arbeit über Flachbogen[33]. Darin erscheint zum ersten Male die später von TOLKMITT[34] erneut aufgenommene Idee einer sog. *mittlern* Belastung (**2**, b). SCHWEDLER ersetzt nämlich die *halbseitige* Belastung q aus dem Verkehr durch eine über die *ganze* Bogenweite reichende gleichmäßige Last von $q/2$, von welcher er eine Hälfte als *positiv*, die andere als *negativ* wirkend einführt. Verfasser hat dies Verfahren von SCHWEDLER insofern erweitert, als er die einseitige Laststrecke *bis zur Lastscheide* durchführt, um so mit Hilfe der zugehörigen Einflußfläche das größte Moment und dessen Ort unmittelbar berechnen zu können. Das ist, wie leicht einzusehen auch möglich, wenn die Einflußfläche *mehr als eine* Lastscheide hat, wie einige derjenigen Flächen, die in der Elastizitätstheorie verwendet werden (**41**, b im II. Bande). SCHWEDLER hat seine Untersuchungen rein analytisch durchgeführt. Die graphische Statik hatte damals, außer in Zürich, wo CULMANN wirkte (I. **42**), und abgesehen von vereinzelten Fällen ihrer Verwendung in Frankreich, noch keinen Boden gefaßt.

e. Die Anfänge der Elastizitätstheorie.

1. Weil die ausführliche Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Elastizitätstheorie der Vollwandbogen der zweiten Hälfte dieses Bandes vorbehalten ist, so wird davon an dieser Stelle nur insoweit die Rede sein, als es notwendig erscheint, um die (unter **1** und **2**) gegebenen Darlegungen über »Grundlagen der Elastizitätstheorie«, sowie über »Näherungsberechnungen« auch noch nach der geschichtlichen Seite hin zu beleuchten.

Die von CULMANN (1821—81), dem Begründer der graphischen Statik (I. **43**) im Jahre 1866[35] veröffentlichte Gewölbetheorie, die lange Zeit hindurch zahlreiche Anhänger fand, ist keine vollkommene Elastizitätstheorie insofern, als CULMANN darin die elastischen Eigenschaften der Wölbsteine nicht berücksichtigt, diese vielmehr noch als starr ansieht, sondern nur das sog. *Setzen* des Gewölbes in Rechnung stellt, d. h. also *die elastische Formänderung des nachgiebigen Fugenmörtels* nach erfolgtem Ausrüsten des Bogens. Dabei geht CULMANN von der Minimalstützlinie (**4**, a) aus und zeigt, wie deren starke Pressungen in der Nähe der Gewölberänder zu einem Ausweichen des Mörtels an diesen Stellen führen und dadurch ein Sinken der Stützlinie im Scheitel und ihr Heben in Bruch- und Kämpferfugen veranlassen. Denn in dem Maße wie der Mörtel an den bezeichneten

[32] SCHWEDLER. Theorie der Stützlinie, ein Beitrag zur Form und Stärke gewölbter Bogen. Zeitschr. f. Bauw. 1859. S. 109.

[33] SCHWEDLER. Über die Stabilität der flachen tonnenförmigen Kappengewölbe. Zeitschr. f. Bauw. 1868. S. 468.

[34] TOLKMITT. Beitrag zur Theorie gewölbter Bogen. Zeitschr. f. Bauw. 1876. S. 402. — Die Berechnung der Gewölbestärke und Bogenform massiver Brücken. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. in Hannover. 1878. S. 451.

[35] CULMANN. Die graphische Statik. 1. Aufl. 1866. In der 2. Aufl. (1875) geht CULMANN zur schärferen Elastizitätstheorie über.

Stellen nachgäbe, kämen tiefere Stellen stärker als vorher zur Lastübertragung. Weiter setzt er, wie MOSELEY und HAGEN, die Gültigkeit des *Satzes von der günstigsten Beanspruchung* voraus und so kommt er zum Schlusse, daß derjenige Gleichgewichtszustand des Bogens der günstigste sei, bei welchem die überhaupt größten Grenzwerte der Randspannungen ihren kleinstmöglichen Wert erreichen. Die Ergebnisse der CULMANNschen Theorie nähern sich, wie FÖPPL[36] hervorgehoben hat, stark denjenigen der vollkommenen Elastizitätstheorie. Ähnliche Theorien wie CULMANN entwickelten CARVALLO[37] (1853) und besonders DURAND CLAYE[38] (1867).

Wie schon erwähnt, hatte PONCELET (S. 47) bereits im Jahre 1852 ausgesprochen, daß eine richtige Gewölbetheorie nur auf Elastizitätsrechnungen zu begründen sei. In damaliger Zeit war man aber noch weit entfernt davon, einen Gewölbebogen, sowie einen *eisernen* Vollwandbogen als durchweg vollkommen genug elastisch anzusehen. NAVIER hatte zwar schon gelehrt, wie man die Spannungen im Gewölbe auf Grund des Elastizitätsgesetzes berechnen müsse, aber, soweit bekannt, war CARVALLO der erste Ingenieur, der (1853) die NAVIERsche Biegungstheorie in ihrem vollen Umfange bei der Gewölbeberechnung verwendete[39]. Es mußten erst eine Reihe von Versuchen über das elastische Verhalten der Steine und der Gewölbe voraufgehen, ehe sich die Überzeugung Bahn brechen konnte, daß es wohl zulässig sei, einen Steinbogen als so ausreichend elastisch anzusehen, um seine Form und Stärke wie bei einem *eisernen* Bogen, durch Elastizitätsberechnungen festzulegen.

2. THOMAS YOUNG (1773—1829) führte den Begriff des *Dehnungsmaßes* ein, unter der Benennung »modulus of elasticy«[40]. THOMAS TREDGOLD (1788—1829) war wohl der Erste, der neben seinen berühmten Versuchen über die Festigkeit des Eisens[41] auch das elastische Verhalten von Steinen untersuchte. Aber erst die Versuche BAUSCHINGERS (1834—1893) im mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule in München beseitigten jeden Zweifel darüber, daß auch die Formänderungen der Steine, für praktische Aufgaben genau genug, auf Grund des Elastizitätsgesetzes (I. **4** und **122**) berechnet werden dürfen. Auch die Beobachtungen der elastischen Formänderungen steinerner Gewölbe durch KÖPCKE[42], DE PERRODIL[43], sowie namentlich die Versuche der Gewölbeausschüsse des österr. Ingenieur- und Architektenvereins[44] haben das Obige bestätigt.

36 FÖPPL. Theorie der Gewölbe. 1881.

37 CARVALLO. Étude sur la stabilité des voûtes. Ann. des ponts et chauss. 1853. I. Deutsch von TELLKAMPF, unter dem Titel »Beiträge zur Gewölbetheorie«. 1855.

38 DURAND-CLAYE. Sur la vérification de la stabilité des voûtes en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pression. Daselbst 1867. I. S. 63. — 1868. I. S. 109. — 1880. I. S. 416.

39 PONCELET. Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes. 1854. Vgl. TELLKAMPFS Bearbeitung im »Notizblatt des hannov. Arch.- u. Ing.-Ver.« 1854. Band III. Heft 3, S. 322.

40 YOUNG. A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. London. 1807. II. § 319. S. 46.

41 A practical essay of cast iron and other metals. London. 1824. Deutsch 1826.

42 KÖPCKE. Die Messung von Bewegungen an Bauwerken mit der Libelle. Protokolle des sächs. Ing.-Ver. 1877.

43 DE PERRODIL. Arc d'expérience, Rapport. Ann. des ponts et chaussées. 1882.

44 Zeitschr. des Oesterr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1895. Nr. 20—34 und 1901. Nr. 25.

WINKLER (1835—1888) wendete (1867) zuerst die Elastizitätstheorie auf Bogen ohne Gelenke an. Ihm gebührt außerdem das besonders hoch zu schätzende Verdienst, die *wahre Lage der Mittelkraftlinie* im Gewölbe, auf Grund des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit in anschaulicher Weise festgelegt zu haben[45]. Unter gewissen wohl zulässigen Voraussetzungen bewies er, daß die wahre Stützlinie sich immer möglichst eng an die Bogenachse schließt, so daß man sagen darf: *Die Mittelkraftlinie wird, im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung, von der Bogenachse ausgeglichen, derart, daß die Summe der Quadrate ihrer Abstände von dieser ein Minimum wird.* Der unter **1** (S. 7) bewiesene Satz, wonach die Mittelkraftlinie von der *günstigten* Bogenachse immer in mindestens drei, bei symmetrischer Anordnung von Belastung und Gewölbe, in vier Punkten geschnitten wird, rührt ebenfalls von WINKLER her.

Wie schon unter **1** und **2** gesagt, sind die Schwierigkeiten, die eine genaue analytische oder graphische Darstellung von Mittelkraftlinien mit Hilfe der Elastizitätstheorie bereitet, groß. Deshalb hat schon WINKLER, als er seine bahnbrechenden Untersuchungen über Bogenträger anstellte (1868), von *Einflußlinien* Gebrauch gemacht, die er damals noch »*Spannungskurven*« nannte. Ihm gebührt danach auch noch das Verdienst, diese hochwichtigen Linien in die graphische Statik eingeführt zu haben[46]. Gleichzeitig verwendete auch MOHR[47] die Einflußlinien, und zwar unabhängig von WINKLER; WEYRAUCH (1873) nannte sie zuerst *Influenzlinien*[48]. Aber trotz der durch die Einflußlinien geschaffenen großen Erleichterung und Übersichtlichkeit der Elastizitätsberechnungen, erscheinen diese im Vergleich zu den beschriebenen Näherungsrechnungen (**2**) immer noch recht umständlich und verwickelt. Das ist der Hauptgrund, der heute noch für die Verwendung von Näherungsverfahren spricht. Das von TOLKMITT eingeführte Verfahren ist dabei besonders zu empfehlen. Verfasser glaubt jedoch, daß auch dies Verfahren, wie er nachgewiesen hat (**2**, **3** und **41** des II. Bandes), bei Verwendung von Einflußlinien und unter Zugrundelegung einer Mittelkraftlinie für diejenige Lastlage, die das überhaupt größte Moment liefert, noch vereinfacht und verbessert werden kann.

---

[45] WINKLER. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. 1867. S. 268. — Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauz. 1879. S. 117, 127 u. 130. — 1880, S. 58, 184, 210 und 243.

[46] Mitteilungen des Arch.- u. Ing.-Ver. f. Böhmen. 1868, S. 6. — 1869, S. 1. — Vgl. auch WINKLER, Theorie der Brücken. 1. Heft. Äußere Kräfte der Balkenträger. III. Aufl. S. 28.

[47] MOHR. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1868. S. 19.

[48] WEYRAUCH. Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger. 1873.

Zweiter Abschnitt.

Stützmauern.

---

§ 2. Einführung in die Theorie des Erddruckes.

9. Die älteren Anschauungen bis auf Coulomb.

Wie im vorstehenden geschichtlichen Rückblicke hervorgehoben wurde, besaß Frankreich die ersten theoretisch geschulten Techniker (S. 44). Sie gehörten entweder zum Korps der Straßen- und Brückenbauingenieure, oder es waren Ingenieuroffiziere. Zu den Letztgenannten zählten u. a. auch COULOMB und PONCELET, deren grundlegende Arbeiten auf dem Gebiete der Gewölbetheorie bereits erwähnt worden sind. Diesen beiden ausgezeichneten Ingenieuren gebührt auch der Ruhm, die Entwickelung der Erddrucktheorie angebahnt und wesentlich gefördert zu haben.

Sowohl beim Bau von Erddämmen, als auch beim Hinterfüllen von Mauern mit Erdreich verschiedener Art, konnten die französischen Ingenieure frühe schon Beobachtungen anstellen, einerseits über das Gleichgewicht von aufgeschütteten Erdmassen an sich, andererseits aber namentlich auch über die Wirkung des Erddruckes gegen die Hinterwand der sog. *Stützmauern*, die im Wege-, Brücken- und besonders im damaligen Festungsbau in mannigfachen Querschnittsgestalten hergestellt wurden. Die Notwendigkeit, Formen und Stärken solcher Stützmauern im voraus zweckentsprechend und sicher genug messen zu können, veranlaßte dann die Beobachter allmählich zu schärferen theoretischen Untersuchungen. So entwickelten sich die ersten Erddrucktheorien.

a. Der Winkel der natürlichen Böschung. Beim Schütten von Dämmen aus erdigen oder sandigen Massen hat man von Alters her beobachtet, wie das Gleichgewicht der Seitenflächen eines Dammes — der sog. *Böschungen* — gestört wird, sobald deren Neigung gegen die Schwerkraftrichtung *zu steil* angelegt worden war. In solchen Fällen sah man das in der Böschung ruhende Erdreich so lange abrutschen oder abrollen, bis der für die Erdart passende Neigungswinkel sich dadurch von selbst gebildet hatte. Die ältern Schriftsteller nahmen diesen Winkel meist zu 45 Grad an, ohne dabei die Verschiedenheit der Erdarten zu berücksichtigen. Heute wissen wir, daß der Winkel, je nach der Beschaffenheit der aufgeschütteten Masse, veränderlich und dabei sowohl von der *Schubfestigkeit* (Cohäsion) als auch von der *Reibung* zwischen den Massenteilchen abhängig ist. Es wird weiterhin auch ausführlich dargelegt werden, wie notwendig und wichtig

es ist, diesen sog. *Winkel der natürlichen Böschung* bei der Berechnung von Stützmauern in jedem Falle nach Maßgabe der örtlichen Verhältnisse so genau wie möglich voraus zu bestimmen. Denn seine Größe ist für die Größe des Erddrucks auf Stützmauern von wesentlichem Einflusse. Es ist ja in die Augen fallend, wie z. B. Erdmassen, die stark ineinander *haften*, d. h. die eine starke Schubfestigkeit (Cohäsion) besitzen, ohne aus dem Gleichgewicht zu kommen, mit lotrechten oder nahezu lotrechten Wänden aufgeschüttet werden können. Mauern, die vor derartigen, keinen Seitendruck ausübenden festen Erdmassen (klüftigem Fels und dergl.) hergestellt werden, nennt man heute *Futtermauern*, zum Unterschiede von *Stützmauern*, auf deren Hinterwand das zu stützende Erdreich einen Erddruck ausübt. Futtermauern sind danach ausschließlich Bekleidungsmauern, deren Stärke ohne Rechnung nach rein praktischen Regeln festgesetzt wird.

b. Das Erddruckprisma und die Richtung des Erddruckes.

1. Sehr ausführliche Angaben über die ältesten Erddrucktheorien finden sich in einem Werk von Mayniel[49]. Danach war das Ziel aller dieser ersten Theorien, den Widerstand zu finden, den eine Stützmauer dem Drucke eines *Erdprismas* entgegenstellt, das von der lotrechten Hinterwand der Mauer, einer in Mauerhöhe wagerecht abgeglichenen Erdhinterfüllung und der natürlichen Böschung begrenzt ist (Fig. 46). Das Prisma braucht immer nur im Querschnitt betrachtet zu werden, wobei die Tiefenabmessung der Mauer — wie bei den Gewölben (**39**, b, des zweiten Bandes) — gleich der Einheit gerechnet und vorausgesetzt wird, daß in jedem Querschnitte hinsichtlich der Anordnung der Mauer und der Beschaffenheit der Baustoffe gleiche Verhältnisse vorliegen. Die drei Grenzlinien des Prismaquerschnittes sollen fortan kurzweg mit *Wand*linie, *Erd*linie und *Böschung* bezeichnet werden.

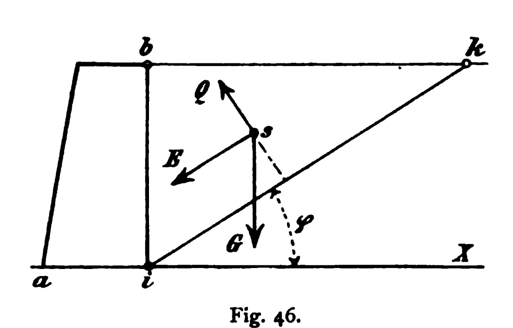


Fig. 46.

Den bezeichneten Widerstand, oder den ebenso großen Erddruck, verglich man mit derjenigen Kraft, die gerade noch groß genug ist, um ein Abgleiten des Prismas auf der Böschung zu verhindern. Dabei dachte man sich das Gewicht G des Prismas in seinem Schwerpunkte s vereinigt und den Gegendruck Q in der Gleitfläche ik senkrecht zu dieser. *Die Richtung des Erddruckes E* nahm man parallel zur Böschung an. Damit waren auch *Größe* und *Angriffspunkt* des Erddruckes festgelegt. Bei dieser Art der Rechnung wurde, abgesehen davon, daß man den Einfluß der Reibung und Schubfestigkeit im Erdreich, sowie auch die Reibung zwischen Wand und Erde vernachlässigte, ein Fehler insofern gemacht, als man die drei Kräfte G, Q und E im *Schwerpunkte* s des Prismas angreifend dachte, obwohl die Richtungen dieser Kräfte im Falle des Gleichgewichtes sich nur in der Schwerpunktslotrechten zu treffen brauchen, also im allgemeinen nicht im Schwerpunkte selbst.

[49] Traité expérimental, analytique et pratique de la poussée des terres et des murs de revêtement. Paris. 1808.

2. Viele Theoretiker haben vorgezogen, das Prisma nicht gleich anfangs als ein Ganzes zu betrachten, sondern es mit Hilfe von zur Böschungsebene parallelen Ebenen in Schichten zu zerlegen, wobei sie für die einzelnen Schichten den gleichen (angegebenen) Rechnungsgang verfolgen. Auf solche Weise erhielten sie die auf den entsprechenden *Teil*flächen der Hinterwand wirkenden elementaren oder Teilerddrücke und somit auch ein Bild von der Art der *Verteilung* des Gesamterddruckes E über die Wand, denn E ist ja die *Mittelkraft* aller Teilerddrücke.

Nach Mayniel findet sich der obige Gedankengang schon ausgesprochen in den Werken der Architekten Bullet und Rondelet[50], sowie auch in verschiedenen Denkschriften von französischen Ingenieuroffizieren (1767 und 1774). In Deutschland hat man damit sogar noch um die Wende des 18. und 19. Jahrhunderts gerechnet, also zu einer Zeit, wo es bereits richtigere Theorien gab[51].

3. Unter dem Titel »Théorie de divers ingénieurs« bespricht Mayniel auch eine von der obenerwähnten Theorie in einem wesentlichen Punkte abweichende Rechnungsweise, die darin besteht, daß die Richtung des Erddruckes E nicht parallel der Böschung, sondern senkrecht zur Hinterwand eingeführt wird. Eine solche Richtung könnte nur eintreten, wenn man es mit einer vollkommen glatten Wand zu tun hätte. Mit Rücksicht auf die zwischen Wand und Erde stets vorauszusetzende Reibung wird aber, wie weiterhin noch näher zur Sprache kommt, die Richtung des Erddruckes immer um einen gewissen Winkel von der Senkrechten zur Wand abweichen müssen. Die Annahme eines senkrecht zur Wand, also (im vorliegenden Falle) wagerecht gerichteten Erddruckes führt auch zu dem mit der Eigenart des Erdreichs unvereinbaren Ergebnis, daß *die Größe des Erddruckes unabhängig von dem Winkel der natürlichen Böschung ist*, denn, wie man leicht überblicken kann, sind dann bei beliebiger Lage der Böschung, die aus den drei Kräften G, Q und E gebildeten geschlossenen Kraftecke (I. **54**) immer dem Dreiecke des Prismas ibk (Fig. 46) ähnlich. Wählt man also den Erddruck E des Kraftecks gleich dem Höhenmaße ib der Wand, so bleibt E bei jeder Lage der ik unverändert.

Bei obiger Annahme einer wagerechten Richtung berechnet sich die Größe von E für eine Mauerhöhe $ib = h$ mit

$$E = G \operatorname{tg} \varphi,$$

wenn φ der Winkel der natürlichen Böschung ist (Fig. 46). Bezeichnet ferner γ das Gewicht der Kubikeinheit des Erdreiches, so erhält man

$$G = \gamma \cdot \frac{h \cdot \overline{bk}}{2}.$$

Weil $\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{\overline{bk}}$ ist, folgt

$$E = \gamma \cdot \frac{h^2}{2}.$$

50 Bullet. Traité d'architecture pratique. 1691. — Rondelet. Traité théorique et pratique de l'art de bâtir.

51 Vgl. hierzu die ausführlichen Literaturangaben in Kötter Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. II. Band. 1891—92. S. 80.

Der Erddruck wäre danach gleich dem Drucke einer reibungs- und schubfestigkeitslosen Flüssigkeit *von gleicher Dichte* wie das Erdreich. Dies Ergebnis stimmt mit der Wirklichkeit nicht überein, weil das Erdreich *nicht* reibungs- und schubfestigkeitslos ist, wie Wasser und andere Flüssigkeiten und weil deshalb auch nicht, wie die ältern Schriftsteller angenommen haben, der Gegendruck Q irgend einer Gleitfläche ik senkrecht zu dieser gerichtet sein kann.

c. Der Gegendruck in einer Gleitfläche. Eine wesentlich richtigere Auffassung bei der Lösung der Aufgabe, die Größe des Erddruckes zu ermitteln, zeigte zuerst COUPLET[52]. Das Erdreich denkt er sich aus gleichartigen, kugelförmigen und in bestimmter Weise aufgeschichteten Sandkörnern bestehend. Dabei kommt er zu dem Schlusse, 1) daß die Sandkörner unmittelbar an der Hinterwand anders gestützt werden, als im Innern der Sandmasse und 2) daß das Gewicht G des Prismas in zwei Seitenkräfte E und Q zu zerlegen sei, von denen der Erddruck E senkrecht zur Hinterwand wirke und der Gegendruck Q der Gleitfläche eine von dem Winkel der Böschung ik abhängige Richtung habe, die aber *auf jener nicht senkrecht stehen könne.*

Wenn nun auch COUPLET bei der Durchführung seiner Theorie unbegründeter Weise wie viele seiner Vorgänger die drei Kräfte G, Q und E noch im Schwerpunkte des Prismas angreifen läßt und wenn er andererseits auch willkürliche, der Wirklichkeit wenig entsprechende Annahmen über die Lagerung der Sandkörner macht, so bleibt ihm doch immerhin das Verdienst, der Erste gewesen zu sein, der den Einfluß der Reibung des Erdreichs (an der Mauer und in sich) auf die Größe des Erddrucks berücksichtigt hat. Dadurch erst kam er zu der wichtigen Erkenntnis, daß der Gegendruck Q der Gleitfläche nicht senkrecht zu dieser stehen könne, weil in der Trennungsebene selbst Kräfte auftreten, die dem Abgleiten des Prismas Widerstand leisten. Daß diese Kräfte Reibungswiderstände und Schubspannungen waren, wurde bald erkannt.

Gestützt auf COUPLETS Untersuchungen bestimmten BELIDOR und andere[53] nunmehr den Erddruck in mehr oder minder willkürlicher Weise derart, daß sie den, entweder senkrecht zur Wand oder parallel zur Böschung gerichtet angenommenen Erddruck, mit Rücksicht auf den Einfluß der Reibung um eine entsprechende Größe verminderten.

10. Die Theorie von Coulomb. In derselben Denkschrift[54], die COULOMBS grundlegende Sätze der Gewölbetheorie enthält (**8**, a), hat er auch seine Erddrucktheorie niedergelegt. Beide Theorien erscheinen darin als Anwendungen der Regeln von den Maxima und Minima auf Aufgaben des Bauwesens. Ehe wir auf den Rechnungsgang von COULOMB näher eingehen, soll vorangestellt werden, zu welchen neuen Ergebnissen er dabei gelangt ist.

---

[52] COUPLET. De la poussée des terres contre leurs revêtements et la force, qu'on leur doit opposer. Histoire de l'académie royale des sciences. Paris 1726—1728.

[53] Vgl. KÖTTER, a. a. O. S. 82. — MAYNIEL, a. a. O. S. 61.

[54] COULOMB. Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. Mém. de mathématique et de physique présentés à l'Académie Royale des sciences par divers savants. Band VII. 1773. Paris 1776. — Deutsch in BÖHMS Magazin. Band V. 1779.

a. Voraussetzungen und Ergebnisse. COULOMB begnügte sich nicht damit, die Gleitebene des Prismas mit der Ebene der natürlichen Böschung zusammen fallen zu lassen, oder sonst willkürlich anzunehmen, wie es seine Vorgänger getan hatten. Im Gegenteil, er betrachtete es als seine Hauptaufgabe, *die wirkliche Lage der Gleitfläche auf mathematischem Wege zu finden.* Unter der zwischen der Wandlinie und der Böschungslinie möglichen unendlich großen Zahl von Rutsch- oder Trennungsflächen im Erdreich, faßte er *zwei* bestimmte Flächen ins Auge, von denen die eine ein Prisma begrenzte, *dessen Abgleiten zu verhindern, den größten wagerecht gerichteten Widerstand erforderte.* Die Lage der andern Fläche wollte COULOMB durch die Bedingung bestimmen, daß der erwähnte wagerechte Widerstand so lange wächst, wie er es darf, ohne dabei das Prisma *die schiefe Ebene hinauf zu schieben.* So wollte er *zwei Grenzwerte* von Widerständen erhalten, von denen der untere, kleinere demjenigen Erddrucke E entspricht, den man heute — wie es im gleichen Falle auch mit der Bogenkraft (**5.** b) geschieht — den *tätigen* nennt. Diese untere Grenze des Widerstandes der Mauer hielt COULOMB für die maßgebende, weshalb er auch nur für sie einen analytischen Ausdruck ableitete.

COULOMB stellt auch den *Einfluß der Reibung* zwischen Mauer und Erdreich mit in Rechnung und zwar in der Weise, daß er außer der zur lotrechten Wand wagerecht gerichteten Seitenkraft A des Erddruckes E noch eine nach unten gerichtete Seitenkraft *in der Mauerfläche* wirkend annimmt, wobei er *das Verhältnis* dieser beiden Seitenkräfte als bekannt voraussetzt. Wenn er also im Verlaufe seiner Rechnung die untere Grenze des erwähnten Widerstandes gleich der wagerechten Seitenkraft A des Erddruckes E setzt, so bestimmt er mit dem Maximum jenes Widerstandes gleichzeitig auch das Maximum der wagerechten Seitenkraft von E. Bei feststehendem Verhältnisse beider Seitenkräfte von E bestimmt er danach also auch *den größten möglichen Erddruck E selbst.* Die *Schubfestigkeit* berücksichtigt COULOMB dadurch, daß er dafür eine der Länge ik der gesuchten Gleitfläche proportionale Kraft einführt. Er nimmt also die widerstehende Schubkraft über die Gleitfläche gleichmäßig verteilt an. Die *Reibung im Erdreich* der Gleitfläche stellt er als einen Bruchteil des gesamten senkrecht zur Gleitfläche wirkenden Gegendruckes Q dar. Diese Reibung setzt er gleich $1/n$ von Q.

In Übereinstimmung mit seinen Vorgängern betrachtet COULOMB die Gleitfläche, deren Lage er sucht, als eine Ebene, die durch die untere Kante (bei i) der Hinterwand verläuft. Die gleiche einfache Annahme liegt auch der heutigen Erddrucktheorie immer noch zugrunde, obwohl es richtiger wäre, die Grenze des Prismaquerschnittes in der Gleitfläche als *krumme* Linien vorauszusetzen, worüber auch COULOMB nicht mehr im Zweifel gewesen ist.

Seine Rechnung führt COULOMB wie folgt: Er zerlegt das Gewicht G des Prismas, sowie auch die beiden Seitenkräfte des Erddruckes E, je in zwei Seitenkräfte, von denen eine senkrecht und die andere parallel zur Schnittlinie der gesuchten Gleitfläche gerichtet ist. Es muß dann im Falle des Gleichgewichtes die Summe aller dieser senkrechten Seitenkräfte eine Reibung in der Gleitfläche hervorrufen, deren Größe gleich der Summe der zur Gleitfläche parallelen Seitenkräfte sein muß. COULOMB erhält danach *zwei Gleichgewichts-Bedingungen.* Die eine stellt die untere

Grenze des Erddruckes dar, wenn Reibung und Schubkräfte in der gesuchten Gleitfläche *aufwärts* wirken und die andere gilt, wenn diese Widerstände *abwärts* wirken. Beide Gleichungen enthalten also die gleichen Glieder, nur die *Vorzeichen* der erwähnten Widerstände sind darin verschieden. Als einzige vorkommende Veränderliche hat COULOMB die Länge bk der wagerechten Kathete des Prismaquerschnittes gewählt. Bezeichnet man diese mit x, so erhält man die untere Grenze des Erddruckes, wenn man x so wählt, daß der wagerechte Widerstand A ein Maximum wird. Durch das Maß von x bestimmt sich die gesuchte Lage der Gleitfläche. Ist dann das Maß der Reibung zwischen Wand und Erdreich gegeben, so hat man damit auch *Richtung und Größe* des Erddruckes E gefunden. Der *Angriffspunkt* des Erddruckes liegt in der zur Gleitfläche parallelen Schwerlinie des Prismas, also um $^2/_3$ der Wandhöhe von der Mauerkrone ab.

COULOMB erhielt danach

$$x = h\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n}\right).$$

Dieser Ausdruck, in welchem h die Höhe der Wand vorstellt, und worin $1/n$ den erwähnten Einfluß der Reibung im Erdreich der Gleitfläche veranschaulicht, erscheint unabhängig vom Einflusse der Schubkräfte. Durch Einsetzen obigen Wertes von x in die betreffende Gleichgewichtsbedingung bestimmte COULOMB schließlich die wagerechte Seitenkraft A des Erddruckes mit

$$A = mh^2 - \delta \cdot l \cdot h, \tag{27}$$

worin δ der gleichmäßig über die Länge der Gleitfläche verteilt gedachte Widerstand der Schubspannungen ist, während m und l Funktionen des in jedem Falle gegebenen Bruches $1/n$ bedeuten.

b. Die Bedeutung der Ergebnisse von Coulomb. COULOMB untersuchte zwar, wie alle seine Vorgänger, nur den Fall einer Stützmauer mit lotrechter Hinterwand und wagerecht abgeglichener Hinterfüllung. Sein gesamtes Rechnungsverfahren gründet sich aber auf neue, zutreffende Voraussetzungen und Annahmen, insofern er es als seine Hauptaufgabe angesehen hat, die wahre Lage der Gleitfläche zu finden, und zwar unter Berücksichtigung der Reibung und Schubwiderstände im Erdreiche, sowie auch der Reibung zwischen Erde und Wand. COULOMB hat später sogar auch noch den Einfluß einer von der Erdhinterfüllung zu tragenden Einzellast untersucht. Die Bedeutung der theoretischen Arbeiten COULOMBS erkennt man am besten aus der Tatsache, daß seine Anschauungen in ihren wesentlichen Punkten auch heute noch die anerkannt gültigen und herrschenden sind, wenn es sich um die Berechnung von Stützmauern handelt.

In einem Punkte ist COULOMB selbst in neuerer Zeit noch öfter mißverstanden worden. COULOMB nennt nämlich das von der Gleitfläche begrenzte sog. Gleit- oder Rutschprisma ein *Prisma des größten Druckes.* Er wählt aber diese Bezeichnung nur der Abkürzung wegen. Wie seine Rechnung erkennen läßt, meint er damit *ein Prisma, dessen Abgleiten zu verhindern, den größten Widerstand A erfordert.* In der Folgezeit hat man aber unter dem Prisma des größten Druckes häufig etwas anderes verstanden. Man hat geglaubt, daß die verschiedenen Prismen,

die durch je eine Gleitfläche abgetrennt gedacht werden, auch verschieden große Drücke auf die Wand ausüben und daß darunter ein Prisma wäre, das den größten Druck liefere. Das war eine irrtümliche Auffassung, die COULOMB zweifellos nicht geteilt hat. *Denn der Widerstand, den die Mauer leisten kann, ist unabhängig von der Lage der Gleitfläche.* Im Falle des Gleichgewichtes ist der Druck jedes Prismas gleich dem Widerstande der Mauer. Der Widerstand aber, der erforderlich ist, um ein Prisma am Abgleiten zu verhindern, ändert sich mit der Lage seiner Gleitfläche. Deshalb bestimmt COULOMB richtig das Maximum dieses Widerstandes, um daraus den maßgebenden Erddruck zu berechnen.

KÖTTER [55] geht in seiner lehrreichen Schrift über die Entwicklung der Erddrucktheorien auf diesen Punkt näher ein. Wenn er sich dabei aber gegen REBHANN und WINKLER wendet und diesen beiden hervorragenden neueren Förderern der Erddrucktheorie vorwirft, nicht die Urschrift COULOMBS, sondern nur einen deutschen Auszug daraus benutzt zu haben, so geht er darin nach der Ansicht des Verfassers zu weit. Die Zeit in welcher REBHANN und WINKLER schrieben, liegt heute 40 Jahre hinter uns. Wer kann heute wissen, welche zwingenden Gründe vorlagen, wenn die beiden Genannten sich damals mit der bloßen Einsicht eines Auszuges der Denkschrift COULOMBS begnügten. Jedenfalls handelten sie in gutem Glauben. Besonders WINKLER, dem die neuere Erddrucktheorie so vieles verdankt, war — wie Verfasser in jahrelangem engeren Verkehr mit diesem uneigennützigen Forscher erfahren hat — von großer Besonnenheit des Urteils und Gründlichkeit des Schaffens. Auch heute wird es noch manche Schriftsteller geben, die nach vielen Richtungen hin Ausgezeichnetes bieten, ohne alle in ihren Abhandlungen angezogenen Urschriften selbst gelesen zu haben.

11. Die Erddrucktheorien des 19. Jahrhunderts.

a. Coulombs Nachfolger bis auf Poncelet. Die grundlegenden Arbeiten COULOMBS sind wohl erst im Anfange des 19. Jahrhunderts weiteren Kreisen bekannt geworden. Einzelne noch aus dem Ende des 18. Jahrhunderts stammende deutsche Veröffentlichungen über Erddruck scheinen selbständige Arbeiten gewesen zu sein, obwohl die darin gegebenen Theorien mit derjenigen COULOMBS eine starke Verwandtschaft zeigen[56]. Besonders zu nennen ist WOLTMANN (1757—1837), der bekannte Wasserbauingenieur, seit 1812 Wasserbaudirektor in Hamburg, der viele vorzügliche mathematische und wasserbaufachliche Schriften hinterlassen hat. WOLTMANNS Theorie des Erddruckes leidet an manchen Unklarheiten. Ihm gebührt aber das Verdienst, an Stelle der Reibungs*ziffer* zwischen Erde und Erde den Reibungswinkel eingeführt zu haben, wodurch die Rechnungen übersichtlicher und einfacher geworden sind[57]. WOLTMANN unternahm im Jahre 1792 Untersuchungen über den Erddruck, um dadurch eine von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Petersburg gestellte Preisfrage zu lösen. Auf S. 167 seines genannten Werkes gibt er für den Böschungswinkel φ folgende Gradzahlen:

---

55 a. a. O. S. 87.

56 KÖTTER, a. a. O. S. 88.

57 WOLTMANN, Beiträge zur hydraulischen Architektur. III. Band. 1794. IV. Band. 1799.

Pulverisierter Steinkalk, trocken .	50	Kiesel- und kleine Straßensteine .	36
pulverisierte Tonerde, - .	45	Sand, trocken	32
pulverisierter Geestlehm, - .	40	Roggen und Rappsaat, je . . .	25.
pulverisierte Gartenerde, - .	37		

Die Erweiterungen der Theorie von COULOMB im Anfange des 19. Jahrhunderts beschränkten sich auf die Sonderfälle einer gegen die Lotrechte *geneigten hinteren Wand* und die einer *oberhalb* der Mauerkrone liegenden Erdlinie mit oder ohne *Überlast*. PRONY und EYTELWEIN behandelten den Fall der geneigten Hinterwand, wobei sie u. a. den Fehler begingen, den Erddruck *wagerecht* anzunehmen, was nur bei *lotrechter glatter* Wand berechtigt gewesen wäre. Für eine lotrechte Wand leitet PRONY den Satz ab, *wonach die Gleitfläche den Winkel zwischen Wand und Böschungslinie halbiert*[58].

FRANÇAIS, AUDOY und NAVIER untersuchen einzelne Fälle, in welchen die Erdlinie nicht mehr wagerecht in der Mauerkrone, sondern überhöht liegt und überlastet ist[59]. Diese Untersuchungen zeigen, wie schwierig und umständlich es ist, die Ergebnisse allgemeinerer Fälle der Rechnung in einigermaßen einfache Ausdrücke zu kleiden. Man braucht nur einmal die von obigen Nachfolgern COULOMBS für die genannten einfachen Bau- und Belastungsfälle erhaltenen verwickelten Formeln anzusehen, um zu erkennen, welch großes Verdienst PONCELET sich erworben hat, als er, als Erster auf einem ganz neuen Gebiete (**8**, a) *die graphische Behandlung der Aufgaben der Erddrucktheorie* anbahnte. Was COULOMB in den rechnerischen Grundlagen für den einfachsten Fall vorzeichnete, erweiterte PONCELET graphisch auf die Fälle der *geneigten Wandlinie* und der *beliebig gebrochenen* Erdlinie[60].

PONCELET berücksichtigt nur die *Reibung*, nicht aber die Schubkraft der Erdschichten, um derart den Sicherheitsgrad der Mauer zu erhöhen. Das empfiehlt sich auch deshalb, weil der Widerstand der Reibung erst zur Wirkung gelangen kann, wenn die Schubkraft bereits überwunden worden ist. Die Reibung zwischen Wand und Erde stellt er voll in Rechnung, in der Annahme, daß die in der Erde widerstehenden Kräfte erst voll aufgebraucht werden müssen, ehe der Grenzfall des elastischen Gleichgewichts eintreten kann. Das Gleit- oder Rutschprisma denkt sich PONCELET also, nach dem Vorgange COULOMBS, wie *einen Keil wirkend*, der (beim tätigen Erddruck) zwischen Wand und Gleitfläche zu sinken droht.

b. Erweiterung der von Coulomb und Poncelet geschaffenen Grundlagen. Das Anwendungsgebiet der Erddrucktheorie bei Berechnung von Stütz-

---

[58] DE PRONY. Recherches sur la poussée des terres. 1802. GILLY u. EYTELWEIN. Praktische Anweisung zur Wasserbaukunst. III. 1805. S. 101—130.

[59] FRANÇAIS. Recherches sur la poussée de terres sur la forme et des dimensions des revêtements et sur le talus d'excavation. Mémorial de l'officier du génie. IV. 1820. S. 157 bis 206. AUDOY. Note additionnelle au mémoire de M. MICHAUX sur la constr. des revêtements. Daselbst XI. 1832, S. 349—374. NAVIER. Leçons sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. II. Aufluge. 1839.

[60] PONCELET. Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations. Note additionnelle sur les relations analytiques qui lient entre elles la poussée et la butée de la terre. Mémorial de l'officier du génie. XIII. 1840. S. 261—270. Deutsch von LOHMEYER. Über die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente. 1844.

mauern ist seit COULOMB und PONCELET hauptsächlich nur nach der graphischen Seite hin vervollkommnet und bereichert worden, besonders nachdem die von PONCELET eingeführten graphischen Hilfsmittel durch CULMANN in seiner »Graphischen Statik« auf breiten wissenschaftlichen Boden gestellt worden waren (1866). So dauerte es nicht lange, bis selbst die schwierigsten Sonderfälle der Erddruckberechnung, bei denen eine rein analytische Behandlung versagen mußte, verhältnismäßig einfache graphische Lösungen gefunden hatten. Von dieser Zeit ab stehen sowohl bei der Berechnung der Gewölbe (**8**) als auch der Stützmauern die graphischen Verfahren mit Recht im Vordergrunde (I. **43**).

Die im Laufe der Zeit eingeführten neuen Rechnungen oder Darstellungen beziehen sich hauptsächlich auf besondere praktische Baufälle, wie sie weiterhin (namentlich im § 3) auch nach der geschichtlichen Seite hin, im einzelnen besprochen werden. Daneben laufen Betrachtungen über *offene Fragen*, z. B. über *Richtung und Angriffspunkt des Erddruckes*, über die *wahre Gestalt der Gleitfläche* usw. Die bedeutendsten älteren Arbeiten auf dem Anwendungsgebiete der Erddrucktheorie rühren von REBHANN[61] und WINKLER her. Die neueren Arbeiten WINKLERS[62] wurden vom Verfasser im folgenden besonders berücksichtigt.

12. Die Richtung des Erddruckes.

a. Bedenken gegen die Annahmen von Coulomb. Der schwerwiegendste Einwand gegen die Theorie von COULOMB ist die Behauptung, daß die Annahme einer um den Reibungswinkel φ_1 von der Wandsenkrechten abweichenden Richtung des Erddruckes nicht begründet sei, weil Reibungswiderstände nur bei einer *Bewegung* der Erde erzeugt werden und weil die von COULOMB verwendeten Gleichgewichtsbedingungen für die starre *Ruhe* gelten. Das wäre richtig, wenn das *starre Gleichgewicht* hier in Frage käme. Es handelt sich hier in Wirklichkeit aber um das *elastische Gleichgewicht* (I. **2**, b), das eintritt, wenn die Stützmauer — als ein im Erdgrunde eingespannter Balken betrachtet — unter dem Drucke der Hinterfüllungserde sich soweit gebogen hat, daß ihre *Spannungen* mit den auf sie wirkenden äußeren Kräften im Gleichgewichte stehen, ohne in irgend einem Punkte die für den Erduntergrund und den Baustoff der Mauer zulässigen Grenzen zu überschreiten. Dabei haben die elastischen Formänderungen der Mauer auf deren Gestalt und ebenso auf das (nach COULOMB zu ermittelnde) *Gewicht G* des Rutschprismas keinen erheblichen Einfluß. Es fragt sich nur, ob und wie weit dadurch die *Richtung des Erddruckes* für eine bestimme Streifenhöhe des Mauerquerschnittes verändert wird. Bei der Beantwortung dieser Frage darf nicht unberücksichtigt bleiben, daß die Erde hinter der fertigen Mauer in einzelnen niedrigen Schichten möglichst vorsichtig, gleichmäßig und ohne Stoß bis zur Mauerkrone aufgefüllt wird. Die Biegung der Mauer beginnt danach schon mit dem Auffüllen

---

[61] REBHANN. Theorie des Erddruckes und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. 1871. — WINKLER. Neue Theorie des Erddrucks nebst einer Geschichte der Theorie des Erddrucks und der hierüber angestellten Versuche. 1872.

[62] WINKLER. Vorträge über die Theorie des Erddrucks, gehalten an der königl. techn. Hochschule in Berlin. Als Manuskript gedruckt. 1880. — Über Erddruck auf gebrochene oder gekrümmte Wandflächen. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 73.

der ersten unteren Erdschicht und sie ist erst vollendet, wenn die letzte obere Schicht aufgebracht worden ist. Während der ganzen Dauer der Hinterfüllung wird die Mauer — ähnlich wie dies beim elastischen Gewölbe (**5**) geschildert wurde — alle ihr zu Gebote stehenden äußeren Kräfte verbrauchen, um zu widerstehen, und um dabei die kleinstmögliche Formänderungsarbeit aufzuwenden. Deshalb werden auch dauernd, bis unmittelbar vor dem Eintritte des elastischen Gleichgewichtes zwischen Erde und Wand *Reibungskräfte* tätig sein, d. h. in allen Schichten werden die Richtungen der Elementarerddrücke um den Winkel φ_1 von der Wandsenkrechten abweichen. Es ist kein Grund vorhanden, anzunehmen, daß dieser Belastungszustand sich nach erfolgter Hinterfüllung *plötzlich* wieder ändern sollte. Das sind die Gründe, die für die Richtigkeit der von Coulomb gemachten Annahme sprechen.

Aus dem elastischen Verhalten der Mauer und der Hinterfüllung ist bislang die wahre Richtung des Erddruckes noch nicht nachgewiesen worden. Versuche, die etwa darauf hinzielen, aus den beobachteten Formänderungen von elastischen, mit Sand hinterfüllten Stäben, auf das Verhalten von Stützmauern, besonders auf die wirkliche Richtung des Erddruckes, zurückzuschließen, haben — nach meiner Meinung — wenig Wert, weil bei solchen Versuchen die besondere Art der Hinterfüllung und Einspannung von Stützmauern nicht zutreffend zur Wirkung gebracht werden kann.

b. Der tätige Erddruck. Wie beim Kanten von Gewölbewiderlagern (**5**, b) eine tätige und eine ruhende Bogenkraft unterschieden wurde, so ist auch beim *Kanten* von Stützmauern ein tätiger und ruhender Erddruck zu unterscheiden. In den meisten Fällen handelt es sich nur um die Gefahr eines Kantens um die Vorderkante a in der Sohle der Stützmauer (Fig. 47), also nur um einen etwaigen Sturz der Mauer *nach außen*. Der Fall eines ruhenden Erddruckes kommt, wie weiterhin erörtert wird, nur ausnahmsweise vor. Deshalb hat schon Coulomb sich fast ausschließlich auf die Ermittelung des tätigen Erddruckes beschränkt (**10**), den er für den Grenzfall des Gleichgewichtes um den Reibungswinkel φ (zwischen Wand und Erde) gegen die Wandlotrechte *nach oben* gerichtet annahm (Fig. 47), so daß der Reibungswiderstand einem *Herab*sinken des Gleitprismas entgegenwirkt. Poncelet, der darin dem Vorgange Coulombs folgte, bestimmte graphisch die Lage einer ebenen Gleitfläche für den Grenzfall des tätigen Erddruckes, worauf er die *Größe des Erddruckes E* aus dem geschlossenen Kraftecke (I. **54**) entnahm, das aus den drei im Gleichgewicht stehenden äußeren Kräften E, Q und G gebildet wird, wenn Q den um den Reibungswinkel φ des Erdreiches von der Gleitflächenlotrechten abweichenden Gegendruck der Gleitfläche, und G das Gewicht des Gleitprismas bezeichnet.

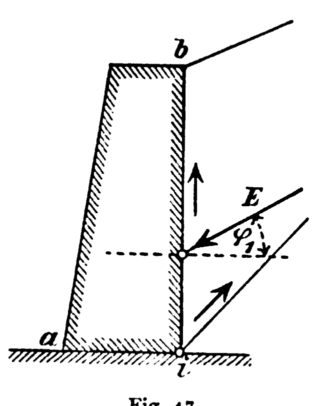


Fig. 47.

c. Der ruhende Erddruck. Wie auch der Querschnitt einer Stützmauer sonst gestaltet sein möge, *sein Schwerpunkt muß unterstützt sein*, d. h. die zugehörige Schwerlinie muß die Sohle der Mauer innerhalb der Randpunkte a und i

schneiden. Denn sonst würde die Mauer nach erfolgter Herstellung umfallen, ehe sie mit Erde hinterfüllt worden ist. Daraus folgt, daß die Stützmauer *an sich* einen Druck auf ihre Hinterfüllung nicht ausübt, mit andern Worten also, daß *ein ruhender Erddruck* nicht vorhanden ist. Bei *Erdbekleidungen* (Fig. 48) ist allerdings der Schwerpunkt s des Querschnittes nicht immer unterstützt. Das Gewicht K der Bekleidung drückt zuweilen auf die Erdschicht bd. Infolgedessen entsteht ein sog. *ruhender Erddruck*. Setzt man *starres* Gleichgewicht voraus, so muß im vorliegenden Beispiele (Fig. 48) die Mittelkraft R aus dem Gewichte K und dem ruhenden Erddrucke E_r irgend einen Punkt der Kronenlinie der Stützmauer treffen. Verläuft R durch den Randpunkt b, so bedeutet das denjenigen Grenzfall des Gleichgewichtes, bei welchem der ruhende Erddruck seinen kleinsten Wert erreicht. Sobald man also (mit Coulomb und Poncelet) die Richtung des

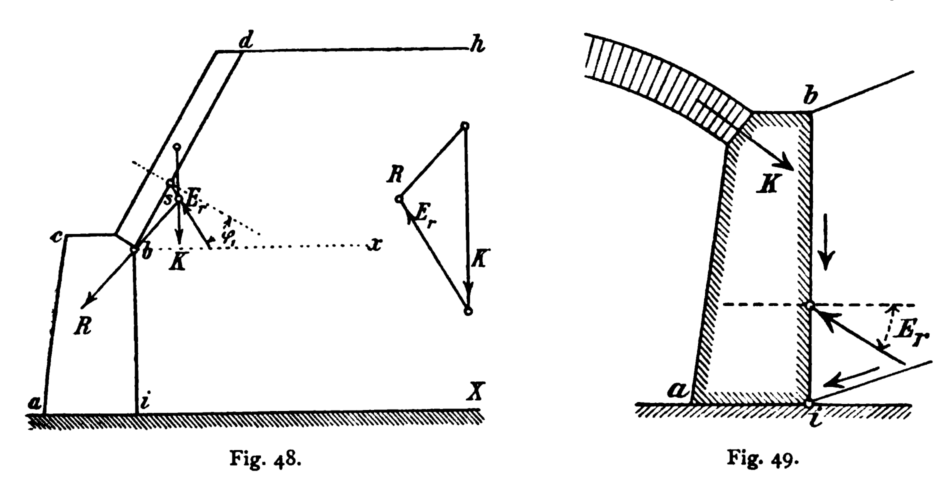


Fig. 48. Fig. 49.

ruhenden Erddruckes um den Reibungswinkel φ_1 (zwischen Wand und Erde) von der Wandsenkrechten nach unten abweichend annimmt, ist die Größe des auf die Stützmauerkrone ausgeübten Druckes R bestimmt, denn R, K und E_r bilden ein geschlossenes Krafteck (Fig. 48). So lange die Richtung von R außerhalb der bc liegt, kann ein *elastisches* Gleichgewicht (I. **2**, b) noch nicht eintreten. Die Bekleidung drückt dann auf das Erdreich und *ändert deren Form*, bis endlich R in den Randpunkt b rückt. Dann ist Gleichgewicht vorhanden, wenn Bekleidung und Mauer als starr angenommen werden.

Sobald ein Schub von außen her auf die Vorderwand einer bereits hinterfüllten Stützmauer wirkt, entsteht auch ein ruhender Erddruck (Fig. 49). Ob in diesem Falle, ebenso wie beim tätigen Erddrucke, die Gleitfläche durch den innern Randpunkt der Sohle ai verläuft, ist nicht nachzuweisen. Daher bleibt die Bestimmung der Lage der Gleitfläche und der Größe des ruhenden Erdruckes unsicher.

13. Die Lage der Gleitfläche und die Größe des Erddruckes.

a. Die wahre Gestalt der Gleitfläche.

1. Wenn eine Stützmauer unter der Wirkung des Druckes eines gleichartigen Erdkörpers *einstürzt*, indem sich die Mauer um den Randpunkt a ihrer Sohle

dreht (Fig. 50) so gleitet oder rutscht (nach COULOMB) ein Erdprisma *ibc* an der Mauerfläche *ib* nach unten. Dabei setzte man voraus, daß die von der Gleitfläche *ic* und von der Wandfläche *ib* auf das Rutschprisma ausgeübten Mittelkräfte Q und E von den Senkrechten jener Flächen um die betreffenden Reibungswinkel φ und φ_1 abweichen. Weil ferner die Mauer dem Abrutschen eines *jeden* Prismas widerstehen muß, so war für ihre Berechnung diejenige Lage der Gleitfläche maßgebend, welche die Mittelkraft E zum *Grenzwerte* machte. Die Berechnung stützte sich danach auf die Grundlage des *starren* Gleichgewichtes der Körper. Elastizitätsvorgänge, wie sie in Wirklichkeit vorherrschen, blieben außer Betracht.

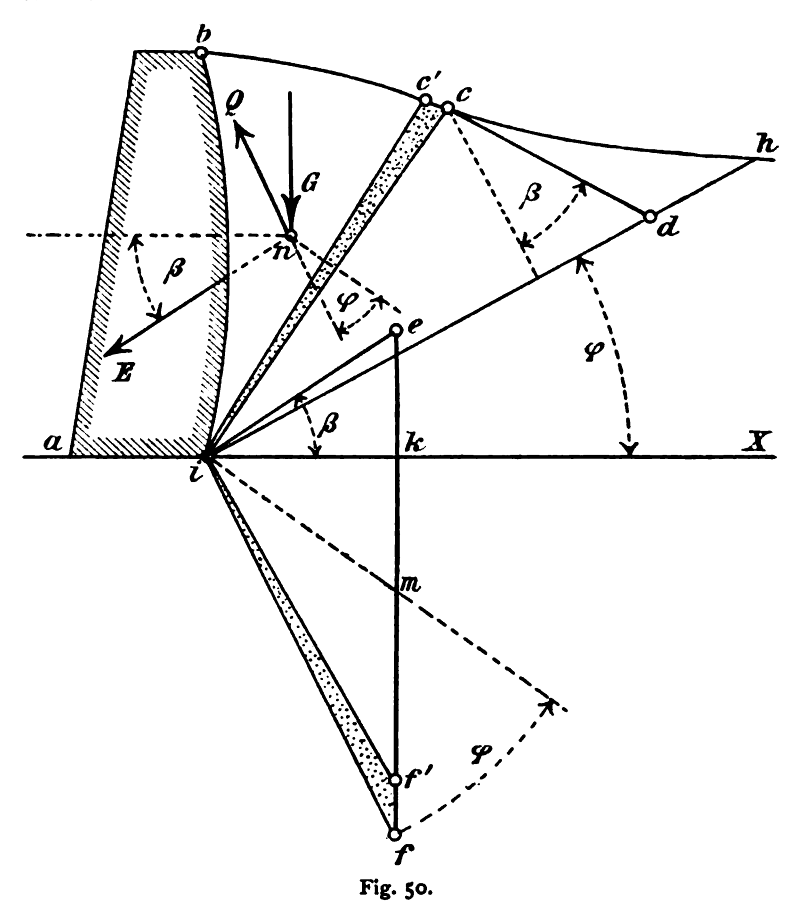


Fig. 50.

2. *Bei ebener Erdoberfläche* ist die Größe des Erddruckes für eine beliebige ebene Wandstrecke dem Quadrate der Wandhöhe proportional. Daraus folgt, daß sowohl der Erddruck E als auch der zugehörige Gegendruck Q der Gleitfläche im oberen Punkte des unteren Drittels der betreffenden Flächen *ib* und *ic* angreifen müssen. Damit wird in jedem Falle der Durchschnittspunkt *n* der Richtungen von E und Q festgelegt. Soll also *Gleichgewicht* der drei am Rutsch-

prisma angreifenden Kräfte E, Q und G stattfinden, so muß die Richtung des Prismagewichtes G durch den Punkt n verlaufen. *Das wird aber im allgemeinen nicht möglich sein, woraus folgt, daß die Theorie von Coulomb im allgemeinen etwas Unmögliches voraussetzt.* Das hat zuerst MOHR nachgewiesen[63]. Genau genommen kann obigen Bedingungen nur durch Einführen einer für jeden Fall zu bestimmenden *gekrümmten* Gleitfläche voll entsprochen werden. Die Gestalt der Krümmung ist aber sehr schwierig festzustellen, wenigstens sind die Versuche dazu bislang gescheitert[64]. COULOMBS einfache (und für praktische Fälle völlig ausreichende) Annahme einer *ebenen* Gleitfläche wird daher bis auf weiteres beizubehalten sein. Übrigens war schon COULOMB sich darüber klar, daß seine Annahme der Wirklichkeit nicht genau entsprechen könne. Er spricht es geradezu aus, daß nur der Wunsch, seine Theorie einfach und den Beteiligten recht verständlich zu machen, ihn veranlaßt habe, von der Voraussetzung einer ebenen Gleitfläche auszugehen. Er hat sogar einen Versuch gemacht, die wirkliche Gestalt der Gleitfläche festzulegen[65]. Anderseits war es COULOMB klar, daß auch die Verlegung des unteren Punktes der Gleitfläche in den inneren Randpunkt i der Mauersohle eine zwar bequeme, aber unbeweisbare Voraussetzung sei. Er hielt jedoch den etwa dabei gemachten Fehler praktisch für belanglos.

b. Darstellung der Lage einer ebenen Gleitfläche. PONCELET zeichnete die Gleitfläche für eine geneigte Wandlinie und eine gebrochene Erdlinie (**11**, a). REBHANN erweiterte die Darstellung durch die Annahme einer beliebigen Querschnittsgestalt für Wand- und Erdlinie. Den von REBHANN aufgestellten grundlegenden Satz von der Lage der Gleitfläche gebe ich nach dem von WINKLER dafür geführten Beweise[66].

1. Im Querschnitt der Mauer, die senkrecht zur Bildebene eine Tiefe gleich der Maßeinheit besitzt, sei bi die *Wandlinie*, bh die *Erdlinie*; ih die Linie der natürlichen Böschung, deren Neigung zur Wagerechten aX gleich dem Reibungswinkel φ des Erdreichs ist. E sei die *Mittelkraft* aller *Teil*erddrücke auf der Wand ib, ihr Winkel zur Wagerechten β. Die Erdlinie ist gerade oder stetig gekrümmt anzunehmen. *Unebenheiten* sind wie die Belastungslinie eines Gewölbes gerade auszugleichen. Starke Erhöhungen auf kurzen Strecken sind als *Überlasten* der ausgeglichenen Erdlinie (nach **19** bis **21**) zu behandeln.

Wir nehmen an, ic sei der Schnitt der gesuchten Gleitfläche und denken uns die ic um einen verschwindend kleinen Winkel cic' gedreht. Das aus dem Erddrucke E, dem Gewichte G des Gleitprismas ibc und dem Gegendrucke Q der

---

63 MOHR. Beitrag zur Theorie des Erddrucks. Zeitschr. des Ingenieur- und Architekten-Vereins Hannover. 1871. S. 344. — Vgl. S. 494 WINKLERS Bemerkungen dazu. Ferner 1872, S. 67, die entscheidende Entgegnung MOHRS. Weitere Quellen sind: MOHR, Abhandlungen aus dem Gebiete der tech. Mechanik. 1906. S. 220—222. — MOHR, eine neue Theorie des Erddrucks. Zeitschr. f. Arch. u. Ingenieurwesen. 1907. Heft 5.

64 KÖTTER a. a. O. S. 109.

65 KÖTTER a. a. O. S. 107.

66 WINKLER, Vorträge über die Theorie des Erddruckes, gehalten an der Königl. techn. Hochschule in Berlin. 1880. S. 1—2.

Gleitfläche zu bildende Krafteck ist als Dreieck ief aufgetragen und dabei (maßstäblich) die dem Drucke Q entsprechende Seite if gleich der Länge ic der Gleitfläche gemacht worden. $\overline{if}$ ist parallel zur Richtung von Q. Macht man noch die Strecke ff' gleich dem Gewichte des verschwindend kleinen Prismas icc' der Tiefe 1, so bedeutet der Winkel fif' den Winkel, den bei der Verschiebung des Punktes c nach c' die beiden Senkrechten zu $\overline{ic}$ und $\overline{ic'}$ miteinander einschließen.

Bezeichnet man allgemein den Winkel, um welchen (bei irgend einer Lage der Gleitfläche ic) der Gegendruck Q von der Gleitflächen-Senkrechten abweicht, mit δ, so kann δ von Null bis auf φ, den Winkel der natürlichen Böschung wachsen. Im Augenblicke wo $\delta = \varphi$ wird, also seinen Grenzwert erreicht, nimmt $\overline{ic}$ die Lage der wirklichen Gleitfläche an. δ erreicht aber den Grenzwert für diejenige Lage der $\overline{ic}$, *die seine Änderung zu Null macht.* Bestimmt man danach allgemein die *Winkeländerung* $d\delta$ und setzt diese gleich Null, so erhält man damit eine Bedingungsgleichung für die Lage der wirklichen Gleitfläche.

Die Winkeländerung $d\delta$ besteht aus zwei Teilen. Sie ist gleich dem Winkel cic', vermindert um den Winkel fif', den die beiden Senkrechten zur $\overline{ic}$ und $\overline{ic'}$ miteinander einschließen.

Aus

$$\sphericalangle cic' - \sphericalangle fif' = 0$$

folgt

$$1) \quad \sphericalangle cic' = \sphericalangle fif'.$$

Es ist weiter anzuschreiben:

$$\frac{\text{Fl. } ibc}{\text{Fl. } icc'} = \frac{\overline{ef}}{\overline{ff'}}$$

und

$$\frac{\text{Fl. } fie}{\text{Fl. } fif'} = \frac{\overline{ef}}{\overline{ff'}},$$

woraus

$$\frac{\text{Fl. } ibc}{\text{Fl. } fie} = \frac{\text{Fl. } icc'}{\text{Fl. } fif'}$$

folgt.

Weil nach vorigem $\overline{ic} = \overline{if}$ gemacht, und nach Gl. 1) der eingeschlossene Winkel bei i in den verschwindend kleinen Dreiecken icc' und fif' gleich groß ist, so erhält man aus der Gleichheit dieser beiden Dreiecke die Bedingung

$$2) \quad \text{Fl. } fie = \text{Fl. } ibc.$$

Man fälle jetzt auf die natürliche Böschungslinie ih von c aus eine Senkrechte und trage daran die Gerade cd, so daß diese mit der Senkrechten den Winkel β einschließt, d. i. der Winkel, den die Richtung des Erddruckes E mit der Wagerechten bildet. Außerdem ziehe man noch durch i zur Gleitflächen-Senkrechten eine Parallele, die um den Winkel φ zur $\overline{if}$ geneigt ist. Dann erhält man folgende Beziehungen:

$$\sphericalangle fik = \sphericalangle mih$$
$$\sphericalangle fik + \sphericalangle ife = 90^\circ$$
$$\sphericalangle mih + \sphericalangle cih = 90^\circ.$$

Das gibt

$$\sphericalangle\, ife = \sphericalangle\, cih$$

und auch

$$\triangle fie \cong \triangle icd .$$

In Verbindung mit der Gl. 2) erhält man schließlich:

$$\text{Fl. } ibc = \triangle\, icd . \tag{28}$$

Damit ist die Lage der Gleitfläche ic *bestimmt.* Bezeichnet man die Gerade cd als das *Erddruckmaß*, weil sie im einfachen Verhältnis zur Strecke ie des Erddruckes E steht, so läßt sich die Gl. (28) wie folgt in Worten ausdrücken:

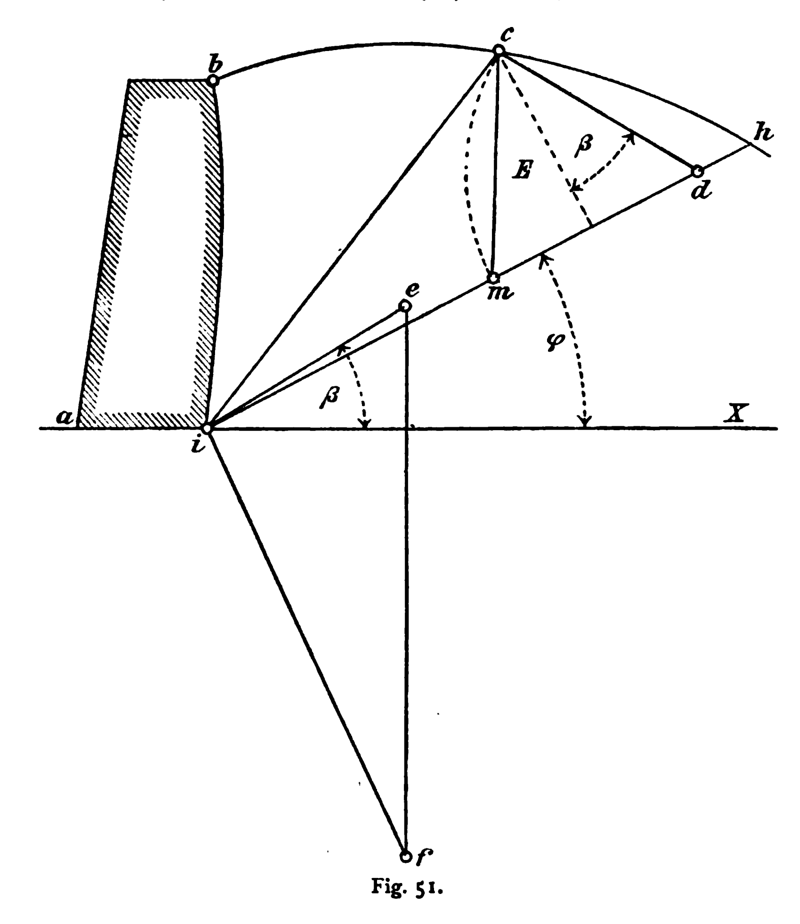


Fig. 51.

Die Gleitfläche halbiert die von den Linien der Wand, der Erde, der natürlichen Böschung und dem Erddruckmaß gebildete Fläche.

Das gilt für beliebige Gestalt der Wand- und Erdlinie. In Fällen wo die Erdlinie *Überlasten* verschiedener Art, auch *Einzellasten* trägt, läßt sich die Ermittelung der Lage der Gleitfläche auf diesen Satz zurückführen (**19—21**).

c. Darstellung der Größe des Erddruckes. Wenn man nach einem weiterhin zu besprechenden Verfahren die Richtung der Mittelkraft E aller Teil-

erddrücke bestimmt hat, kennt man deren Winkel β mit der Wagerechten und ist darauf imstande nach dem vorigen, aus der Gl. (28) entspringenden Satze auch die Lage der Gleitfläche ic festzulegen. Dies sei in der Fig. 51 geschehen. Die Darstellung der Größe des Erddruckes erfolgt dann mit Hilfe des Erddruckmaßes cd.

Man mache $\overline{cd} = \overline{dm}$, wobei m in die natürliche Böschungslinie fällt. Das so erhaltene Dreieck cdm wird das *Druckdreieck* genannt. *Sein Flächeninhalt F multipliziert mit der Tiefe 1 und dem Gewichte γ_e der Kubikeinheit der Erde gibt die Größe von E*

$$E = \gamma_e \cdot 1 \cdot F. \tag{29}$$

Der Beweis für die Richtigkeit der Gl. (29) ergibt sich aus dem Vergleiche des Druckdreiecks cdm mit dem Kraftdreiecke ief. Es ist

$$\frac{\text{Fl. } cdm}{\text{Fl. } cdi} = \frac{\overline{dm}}{\overline{di}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{di}} = \frac{\overline{ie}}{\overline{fe}} = \frac{E}{G}.$$

Ferner ist

$$G = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } ibc = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } cdi.$$

Danach ist auch

$$E = G \frac{\text{Fl. } cdm}{\text{Fl. } cdi} = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } cdi \cdot \frac{\text{Fl. } cdm}{\text{Fl. } cdi}$$

oder

$$E = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } cdm,$$

was zu beweisen war.

14. Theorie des Erddruckes im unbegrenzten Erdreiche.

a. Die Lage der Gleitflächen. Wenn man sich eine lose, schub- und zugfestigkeitsfreie Erdmasse aufgeschüttet denkt, die nach allen Richtungen hin gleiche physikalische Eigenschaften zeigt, so wird es möglich sein, den Spannungszustand in irgend einem Punkte ihres Innern analytisch eindeutig festzulegen (I. **99**). Man darf dann wie bei der Berechnung von Stützmauern voraussetzen, daß die Belastungsverhältnisse für alle lotrechten Schnitte der Erdmasse die gleichen sind. So beschränkt sich die Aufgabe, die im Innern des Erdreiches entstehenden Spannungen zu berechnen, auf den Fall des *ebenen Spannungszustandes*, bei welchem die Spannung in *einer* der durch den fraglichen Punkt gelegt gedachten Koordinatenebenen gleich Null wird.

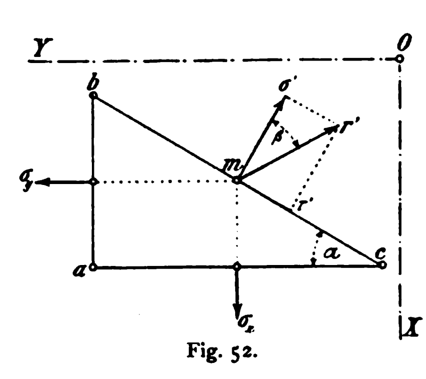


Fig. 52.

Betrachtet man danach im Erdinnern ein unendlich kleines Prisma, dessen Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck abc bildet (I. **116—118**), so lege man die wagerechte Z-Achse senkrecht zur Bildebene, in welcher der Querschnitt liegt und lasse dessen beide Katheten mit je einer weitern Achse (X, Y) parallel sein (Fig. 52). Dann sind die Spannungen im *Schrägschnitte* der unter dem beliebigen Winkel α zur Wagerechten geneigten Hypothenuse bc in ähnlicher Weise zu berechnen, wie dies im I. Bande, in § 17, ausführlich dargelegt worden ist.

Die Spannung σ_x ist im vorliegenden Falle bekannt. Ist γ_e das Gewicht der Raumeinheit des Erdreiches, so ist

$$\sigma_x = \gamma_e \cdot h ,$$

wenn h die über der Fläche ac lastende Erdhöhe ist. Der Druck σ_x ist gleich demjenigen einer Flüssigkeit von der Dichte γ_e. Eine Schubspannung kann (nach unserer Voraussetzung) in der Fläche ac nicht auftreten, σ_x ist demnach eine *Hauptspannung*. Deshalb ist auch σ_y eine solche, so daß auch in der Fläche ab keine Schubspannung wirkt. Eine Achse der Spannungsellipse (I. **117**) liegt wagerecht, die andere lotrecht. Der Unterschied zwischen dem Spannungszustande in einer Flüssigkeit und im Erdreich besteht nur darin, daß hier σ_x und σ_y nicht gleich groß sind. Das Verhältnis zwischen σ_x und σ_y soll jetzt gefunden werden. Stellt man zu dem Zwecke die Gleichgewichts-Bedingungen auf, so kann man daraus (wie im Falle I. **116**) zunächst die im Schrägschnitte bc wirkenden Spannungen σ' und τ' ableiten. Man erhält

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha . \tag{30}$$

r' sei die Mittelkraft von σ' und τ'. Ihr Winkel β mit der Schrägschnitt-Senkrechten berechnet sich aus

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\tau'}{\sigma'} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)\operatorname{tg}\alpha}{\sigma_y + \sigma_x \operatorname{tg}^2\alpha} . \tag{31}$$

Den größtmöglichen Wert von β erhält man bei irgend einer Neigung α des Schrägschnittes, die aus der Bedingung

$$\frac{\partial \operatorname{tg}\beta}{\partial \operatorname{tg}\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \frac{\sigma_y + \sigma_x \operatorname{tg}^2\alpha - 2\sigma_x \operatorname{tg}^2\alpha}{(\sigma_y + \sigma_x \operatorname{tg}^2\alpha)^2} = 0$$

zu berechnen ist. Das gibt

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} , \tag{32}$$

wenn α_0 denjenigen Winkel α darstellt, für welchen β seinen Größtwert erlangt. Die Gl. (32) besagt, daß es zwei symmetrisch zur Schrägschnitt-Senkrechten liegende Winkel gibt, die obige Bedingung erfüllen. Der positive oder negative Größtwert β_0 ist durch Verbinden der Gl. (31) mit der Gl. (32) zu ermitteln. Man erhält daraus

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} - \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}\right) . \tag{33}$$

Größer als der *Reibungswinkel zwischen Erde und Erde* darf der Winkel β_0 nicht werden. Denn sonst würde ein *Gleiten oder Abrutschen* der im Schrägschnitte lagernden Erdteilchen eintreten müssen (**2**, a). Durch den Winkel β_0 kann man also auch die Lage *zweier Gleitflächen* bestimmen, von denen die eine dem *tätigen*, die andere dem *ruhenden Erddrucke* σ_y im Punkte m entsprechen muß.

Setzt man in Gl. (33)

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \operatorname{tg}\varphi = f,$$

wobei f die *Reibungszahl* bedeutet, so erhält man daraus das gesuchte Verhältnis zwischen σ_x und σ_y mit

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 2f^2 + 1 \pm 2f\sqrt{f^2+1}. \tag{34}$$

Darin muß man für den Grenzwert des tätigen Erddruckes, weil dieser der *kleinste* ist, das negative Zeichen nehmen. Für den ruhenden Erddruck gilt das positive Zeichen.

Der Reibungswinkel für trockenen Sand darf zu 35° angenommen werden. Das gibt $f = 0{,}700$ und

$$\sigma_x = 0{,}27\,\sigma_y.$$

Um eine einfache Regel für die Lage der Gleitflächen zu erhalten, braucht man nur Gl. (32) und Gl. (33) miteinander zu verbinden:

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha_0 - 1}{2\operatorname{tg}\alpha_0} = -\operatorname{cotg} 2\alpha_0. \tag{35}$$

Es ist nun beim tätigen Erddruck

$$\sigma_x < \sigma_y$$

oder

$$\operatorname{tg}\alpha_0 > 1,$$

d. h. α_0 ist größer als 45° und $2\alpha_0$ ein stumpfer Winkel. Danach folgt aus der Gl. (35)

$$2\alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

oder

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}, \tag{36}$$

in Worten: *Die Gleitflächen sind unter 45 Grad + dem halben Reibungswinkel gegen die Wagerechte, oder gegen die Richtung der kleinern Hauptspannung σ_x, geneigt*[67].

b. **Anwendbarkeit der Theorie auf die Berechnung von Stützmauern.** Das Verdienst, Betrachtungen über den Druck im Innern einer Erdmasse angestellt zu haben, gebührt SCHEFFLER[68]. Ihm folgte RANKINE[69], dessen Untersuchungen lange unbeachtet blieben, bis ziemlich gleichzeitig (1869—1871) zwei französische und zwei deutsche Arbeiten über den gleichen Gegenstand erschienen, deren Verfasser LÉVY[70], CONSIDÈRE[71], WINKLER[72] und MOHR[73] waren. Seitdem ist die

---

67 FÖPPL. Vorlesungen über techn. Mechanik. III. Band. Festigkeitslehre. S. 446.

68 SCHEFFLER. Über den Druck im Innern einer Erdmasse. Crelles Journal der Baukunst. 1851.

69 RANKINE. On the stability of loose earth. Phil. Transactions of the London Royal Society. 1856—57.

70 Comptes rendus de l'Académie des sciences. 1869—70.

71 Annales des ponts et chauss. 1870. I.

72 Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Ver. 1871.

73 Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. Hannover. 1871.

Theorie des Erddruckes im unbegrenzten Erdreich vielseitig gefördert worden. Trotzdem aber ist ihre Anwendung auf die Berechnung der Stützmauern von praktischen Erfolgen nicht begleitet gewesen. Sie hat dabei in manchen Punkten ganz versagt, so daß das von Coulomb und Poncelet begründete Berechnungsverfahren bis heute das herrschende geblieben ist.

Die Schwierigkeiten bei der Anwendung der neuen Theorie auf die Berechnung von Stützmauern liegen — wie weiterhin in § 4 näher dargelegt wird — hauptsächlich darin, daß beim Hinzutreten der Mauer die physikalischen Verhältnisse in dem Erdreich unmittelbar hinter der Mauer nicht ohne weiteres mehr so vorausgesetzt werden dürfen, wie das (unter a) geschehen konnte. Die Anwendung des neuen Verfahrens führt deshalb in einigen Fällen zu Unrichtigkeiten. Es liegt auch wohl auf der Hand, daß eine zutreffende Berechnung von Stützmauern nicht eher aufgestellt werden kann, bis es gelungen ist, die physikalische Natur der Hinterfüllungserde durch Versuche schärfer festzustellen, als es bisher geschehen ist. Dabei wird es notwendig werden, auch die im Erdreich unter einem gewissen Spannungszustande eintretenden *Formänderungen* zu berücksichtigen. Eine von solchen Gesichtspunkten ausgehende neue Theorie des Erddruckes hat Boussinesq[74] aufgestellt. Dieser betrachtet die sandförmigen Massen als auf der Grenze zwischen den flüssigen und festen Körpern stehend und stellt die Erddrücke als Funktionen der Formänderungen der kleinsten Erdteile dar. Bislang fehlen aber noch Versuche, deren Ergebnisse die Richtigkeit und Anwendbarkeit der Theorie von Boussinesq bestätigen könnten. Jedenfalls steht fest, daß die bislang vorliegenden Versuchsergebnisse nicht ausreichen, um dem Ingenieur einen sichern Einblick in die statischen Vorgänge zu verschaffen, die sich bei dem Druck des Erdreiches hinter Stützmauern abspielen[75]. Die von Mohr gegebene Theorie des Erddruckes im unbegrenzten Erdreiche folgt in § 4.

§ 3. Graphische Berechnung der Stützmauern.

Die nachfolgenden Rechnungen und Darstellungen stützen sich auf die im § 2 gegebenen allgemeinen Darlegungen über die *Lage der Gleitfläche*, sowie auch über *Richtung und Größe des Erddruckes.* Anfangend vom einfachen Falle der geraden Wand- und geraden Erdlinie, werden der Reihe nach die gebräuchlichen Bauformen der Stützmauern behandelt werden.

15. Einleitende Bemerkungen.

a. Bedingungen für die Standsicherheit. Jede Stützmauer ruht mit ihrer Sohle *ai* (Fig. 53) auf dem Erdboden, der (abgesehen von festem Stein- und Felsuntergrunde) einen Druck von etwa 3—6 atm mit ausreichender Sicherheit zu tragen vermag. Diese Spannungsgrenzen liegen weit unterhalb derjenigen Grenzen, die für Baustoffe als zulässig gelten (I. **7**, **12**); die Standsicherheit einer

---

[74] Boussinesq. Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui des massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion. 1876.

[75] Kötter, a. a. O. S. 135—148.

Stützmauer hängt deshalb in erster Linie von der ausreichenden Tragfähigkeit des Untergrundes der Sohle *ai* ab.

Maßgebend für die *Größe des Bodendruckes* ist die Lage und Größe der Mittelkraft R aus dem Erddrucke E und dem Gewichte P der Mauer. E ist die Mittelkraft aller *Teil*erddrücke, die in der Fig. 53 (auf der Wandlinie *ib*) durch Pfeile dargestellt sind. Ihre Richtungen verändern sich gleichmäßig mit den Richtungen der Tangenten ihrer Angriffspunkte. Die Richtung der Teilerddrücke in einer Gleitfläche *ih* ist, wie vorausgesetzt, unveränderlich, also dem Gegendruck Q parallel.

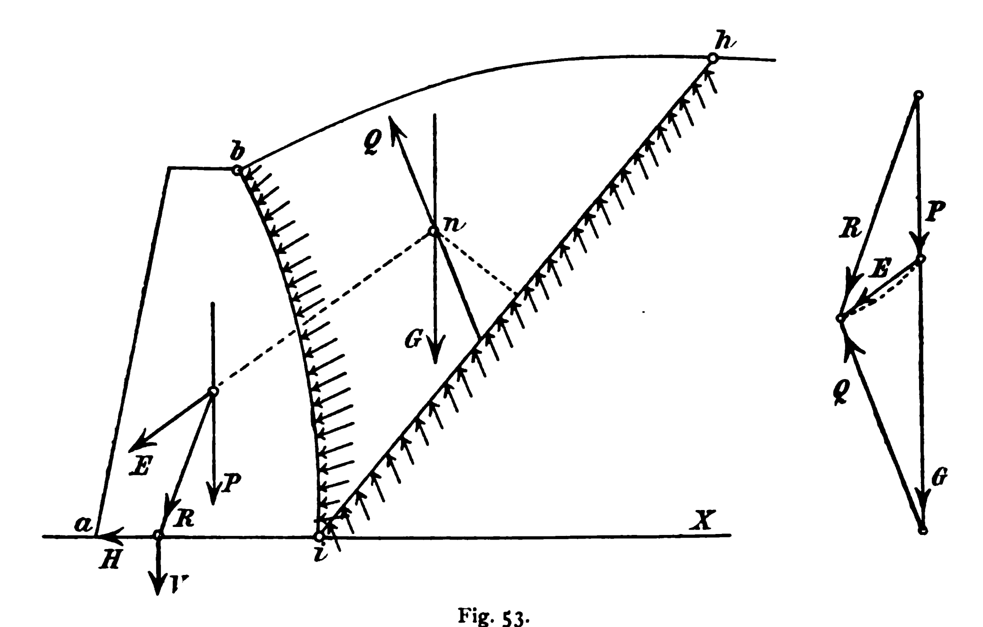


Fig. 53.

Wird R in seinem Stützpunkte auf der Sohle *ai* in zwei Seitenkräfte zerlegt, von denen die wagerechte (H) in die Sohle fällt und die lotrechte (V) senkrecht dazu steht, so sind die Bedingungen für die Standsicherheit der Mauer wie folgt auszusprechen:

1) Der durch die lotrechte Kraft V erzeugte Bodendruck in der Sohle darf die zulässigen Grenzen nicht überschreiten.
2) Bei frei, ohne Mörtelverbindung oder dergl. in der Sohle gestützter Mauer muß die wagerechte Kraft H kleiner sein, als der durch V erzeugte Reibungswiderstand. Also $H < V \operatorname{tg} \psi$, wenn ψ den Reibungswinkel zwischen Sohle und Mauer vorstellt. Die Sicherheit gegen Verschieben der Mauer sollte mindestens 2fach sein.
3) In keinem Punkte des Mauerquerschnittes darf die zulässige Fugenspannung überschritten werden.

Unter gleichen Belastungsverhältnissen gibt es selbstredend mehrere Mauer*querschnitte*, die obige drei Bedingungen erfüllen, also in *statischer* Hinsicht ausreichende Standsicherheit bieten. Dabei kann die *Gestalt* der Querschnitte sehr

verschieden ausfallen und rein theoretisch würde derjenige darunter als der beste gelten, der den kleinsten Flächeninhalt besitzt, im allgemeinen also auch die geringsten Herstellungskosten verursachen wird, abgesehen von besonderen Verschiedenheiten in baulicher Hinsicht, die hier nicht in Betracht zu ziehen sind. Es wird nicht ohne Nutzen sein, die verschiedenen möglichen Gestalten eines Mauerquerschnittes auch in statischer Beziehung miteinander zu vergleichen. Das ist weiterhin (unter **25**, b) geschehen.

b. Die physikalische Natur der Hinterfüllung und des Untergrundes[76].

1. Weil die Größe des Erddruckes wesentlich von der Lage der Gleitfläche und dem Gewichte des Gleitprismas abhängt, so ist es in einem vorliegenden Falle von besonderer Wichtigkeit, den *Winkel φ der natürlichen Böschung* sowie auch das Gewicht so genau wie möglich zu bestimmen. Von der *an der Baustelle wirklich vorhandenen Beschaffenheit der Hinterfüllung und des Untergrundes* hat sich der Ingenieur vorher genaue Kenntnis zu verschaffen. In der Regel ist die Hinterfüllungserde eine *trockene*, durchweg aus Sand, Lehm oder Ton bestehende Masse. Sand und Kies (oder dergl.) sind zur Hinterfüllung am besten geeignet, weil sie *Wasser durchlassen*, ohne dabei ihr Raumgewicht γ_e zu ändern. Für die Rechnung darf man annehmen:

Raumgewicht γ_e im trockenen Zustande	t/m³	Reibungswinkel φ Grad
Leichter Sand	1,6	30
Kies	1,8	35
Lehm oder Ton	1,4—1,6	40—45[77]

Für *nassen* Lehm oder Ton erhöht sich das Gewicht auf etwa 1,9 bis 2,0 t/m³, wobei je nach den Umständen der Reibungswinkel sich auf 20° und weiter verkleinern kann. Bei Mauern an Flüssen und Strömen, deren Hinterfüllung Wasser aufnehmen kann, ist aus Gründen der Sicherheit zu raten, auch für Sand und Kies, wegen der Ausfüllung ihres *Poren*inhaltes[78] mit Wasser, ein etwas größeres Gewicht als das angegebene und einen entsprechend kleineren Reibungswinkel in Rechnung zu ziehen. Auch der Reibungswinkel für Sohle und Erdboden ist in solchen Fällen, wegen des unvermeidlichen *Auftriebes* in der Sohle, entsprechend klein anzusetzen. Vergl. das Beispiel unter **26**.

2. Der *Erduntergrund* in der Sohle der Mauer darf als ausreichend elastisch angesehen werden, um seine Spannungen nach dem Elastizitätsgesetze (I. **4**) berechnen zu können. Zwischen stark und wenig zusammenpreßbarem Boden ist zu unterscheiden. Der erstgenannte Boden ist der gefährlichere, weil seine ursprüngliche *ebene* Oberfläche bei wechselnder Lage des Angriffspunktes der Mittel-

[76] Handb. der Hygiene. I. 2. Abt. 3. Heft. SOYKA. Der Boden, S. 30—34.

[77] Weitere Zahlen finden sich im *Anhange*, § 5 unter **36**.

[78] ENGELS. Zur Berechnung der Bohlwerke, Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 650.

kraft R aller Kräfte (Fig. 53) an den Rändern a und i leicht starke Verdrückungen erleidet, wodurch die Oberfläche eine *Krümmung* annimmt. Bei derart stark zusammenpreßbarem Boden ist es ratsam, die Mittelkraft R möglichst *durch die Mitte der Sohle* verlaufen zu lassen. Denn dann erfahren alle Punkte der Sohle nahezu gleiche Pressungen, so daß zur Bildung der erwähnten Oberflächenkrümmung keine besondere Veranlassung mehr vorliegt. Eine solche Vorsicht ist auch dann noch zu raten, wenn örtlicher Verhältnisse wegen, ein stärkeres Schwanken in der Lage des Angriffspunktes von R nicht zu erwarten steht.

3. Bei der *Berechnung einer Ufermauer* ist die Frage zu beantworten, wie sich der Zustand der Hinterfüllung der Mauer ändert, wenn der Wasserstand an ihrer Vorderwand stark wechselt. ENGELS[79] hat diese Frage durch eine Reihe von Versuchen gelöst, wobei er als Hinterfüllung *durchlässigen reinen Sand* verwendete. Er kam zu folgenden Ergebnissen.

Im Sandboden hinter der Mauer sind dreierlei Zustände zu beobachten: Eine oberste Schicht wird (abgesehen vom Einflusse des Regens) *trocken* bleiben, eine mittlere wird *plastisch feucht* und die unterste *voll durchnäßt*. Der zu den Versuchen benutzte Sand besaß folgende Eigenschaften:

Art der Hinterfüllung	Raumgewicht γ_e in t/m³	Böschungswinkel φ in Graden	Besondere Eigenschaften des Versuchssandes
trocken	1,73	32° 15′	Die kapillare Saughöhe = 0,27 m
plastisch feucht	1,88	43°	
voll durchnäßt	2,03	27°	Der Porengehalt = 0,288

Bisher nahm man bei der Berechnung von Ufermauern gewöhnlich den ungünstigsten Fall an, d. h. vor der Mauer Niedrigwasser und die Hinterfüllung bis zum früheren Hochwasser voll durchnäßt. Ein solcher Belastungszustand wird — wenn er überhaupt möglich ist — um so eher eintreten, je rascher das Fallen des Außenwassers vor sich geht und je weniger die Verbindung der Hinterfüllung mit dem Außenwasser baulich gehindert wird.

Unter der Voraussetzung, daß auch der Boden unter der Sohle der Ufermauer aus reinem Sande besteht, wird bei steigendem Außenwasser sich zwischen diesem und dem Grundwasserstande ein Ausgleich vollziehen, was dichte Spundwände zwar verlangsamen, aber nie ganz verhindern können.

4. Wenn die *Sohle einer Stützmauer* im wasserhaltigen durchlässigen Untergrunde liegt, so wird zu entscheiden sein, welcher *Auftrieb* in der Sohle für die Berechnung der Mauer anzunehmen ist. Auch diese Frage hat ENGELS (in der angezogenen Quelle) beantwortet. Danach steht fest:

1) Wenn das Grundwasser sich im Ruhezustande befindet, erfährt die Mauersohle den vorhandenen vollen hydrostatischen Auftrieb.

2) Bei strömendem Grundwasser darf der Auftrieb genügend genau gleich dem Mittel aus den hydrostatischen Drücken an der Ober- und Unterwasserseite gesetzt werden.

---

[79] ENGELS. Über die Größe des Wasserdruckes im Boden. Zeitschrift für Bauwesen. 1911.

3) Erst bei einer Wassergeschwindigkeit von mehr als 0,5 mm/sek. hat die durch die Wasserbewegung hervorgerufene Druckverkleinerung einen praktisch fühlbaren Einfluß: Sie darf dann, selbst bei feinem Sande auf etwa ein Zehntel der mittleren hydrostatischen Druckgröße angenommen werden.

Wenn der Wasserspiegel nicht frei, sondern *unter der Erdoberfläche* liegt, ändern sich die Druckhöhen nicht, weil die darüber liegende kapillar durchfeuchtete Schicht beim Wasserdrucke ausscheidet.

16. Ebene Wand und beliebige Erdlinie.

a. Die Stellungslinie. Das Erddruckmaß cd (Fig. 50) schließt mit der Senkrechten zur Böschungslinie denselben Winkel β ein, wie die Richtung *der Mittelkraft E der Teilerddrücke* mit der Wagerechten. Die Richtung des Erddruckmaßes wird sowohl bei der Darstellung der Gleitfläche als auch der Größe von E gebraucht.

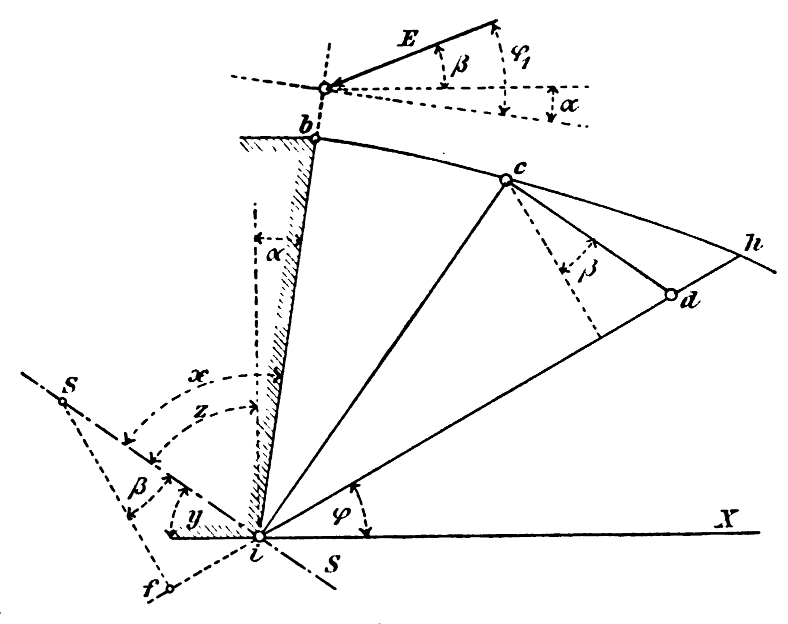


Fig. 54.

Deshalb hat schon Rebhann ein einfaches Hilfsmittel ersonnen, um die bezeichnete Richtung bequem auftragen zu können. Er benutzt dazu die sog. *Stellungslinie, das ist eine Hilfslinie, die mit einer geraden Wandlinie den Winkel* $(\varphi + \varphi_1)$ *einschließt und deshalb dem Erddruckmaß parallel ist.*

Der Beweis für die Richtigkeit des Satzes von der Stellungslinie kann wie folgt geführt werden (Fig. 54): SS sei die durch den Randpunkt i gelegte Stellungslinie; ib eine Wandlinie, die mit der Lotrechten den Winkel α bildet. Dann ist zu beweisen, daß der Winkel x, den die zur $\overline{cd}$ parallele SS mit der $\overline{ib}$ einschließt, gleich $\varphi + \varphi_1$ ist, d. h. gleich der Summe der beiden bekannten Reibungswinkel (für Erde auf Erde und Erde auf Wand). Es ist (mit Bezug auf die Fig. 54)

$$x = z + \alpha$$
$$\alpha = \varphi_1 - \beta$$
$$z = 90^0 - y$$
$$x = 90^0 - y + \varphi_1 - \beta.$$

Zieht man $\overline{Sf}$ senkrecht zur natürlichen Böschungslinie ih, so folgt

$$90^0 = \beta + y + \varphi,$$

das gibt

$$x = \varphi + \varphi_1.$$

Der Nutzen der Stellungslinie wird weiterhin erkannt werden.

b. Lage der Gleitfläche und Größe des Erddruckes. Das hier gegebene Verfahren stammt von WINKLER. Die beliebige Erdlinie sei bh (Fig. 55). Unstetige starke Erhöhungen der Erdlinie werden als *Überlasten* (nach **19** bis **21**) behandelt. Man trage zuerst irgendwo die *Stellungslinie* ein, z. B. im Punkte i.

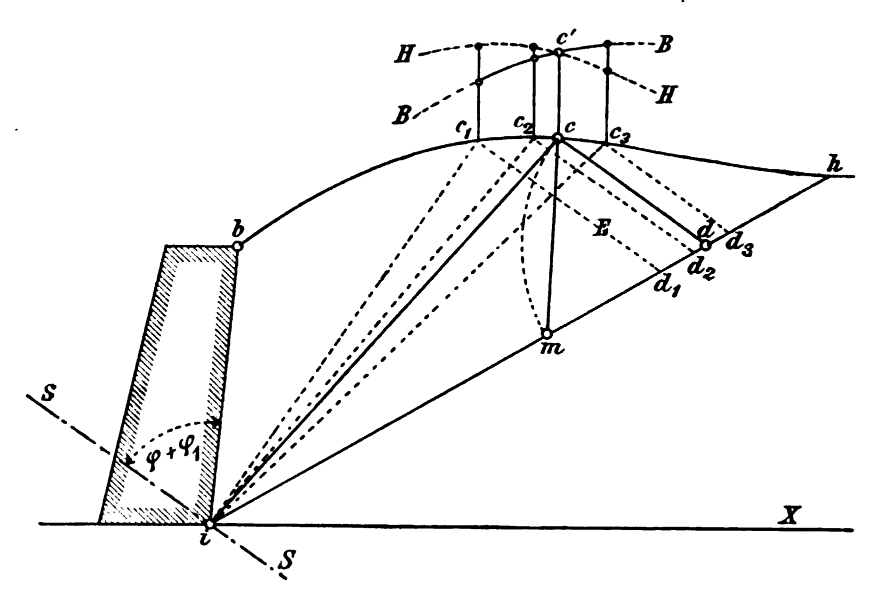


Fig. 55.

Dann nehme man verschiedene Lagen der Gleitfläche an, z. B. ic_1, ic_2, ic_3. Lege durch die Punkte c_1 bis c_3 Parallelen zur Stellungslinie, berechne für *jede* dieser Gleitflächen die Inhalte der zugehörigen Flächen ibc und cdi und trage diese als Ordinaten in den betreffenden Fußpunkten c auf. Durch Verbinden der Endpunkte je einer Ordinatenreihe erhält man dann zwei Linienzüge BB und HH, von denen die Ordinaten der ersten die Gewichte der Rutschkörper angeben, und die Ordinaten der zweiten die Gewichte der Flächen icd vorstellen. Lotrecht unter dem Schnittpunkte c' der beiden Linien liegt demnach der Punkt c, in welchem *die wahre Gleitfläche mündet, für welche* (nach **13**, b) *die Fläche ibc inhaltsgleich der Fläche cdi wird.*

Überträgt man (nach **13**, c) das (der Stellungslinie parallele) Erddruckmaß *cd* auf die natürliche Böschungslinie *ih*, macht also

$$\overline{cd} = \overline{dm},$$

so ist *cdm* das *Druckdreieck* und (nach Gl. 29)

$$E = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, cdm.$$

17. Grundfall der ebenen Wand und geraden Erdlinie.

a. Die Gleitfläche. Der zu beweisende, zuerst von Poncelet (**11**, a) gefundene Satz von der Gleitfläche lautet hier:

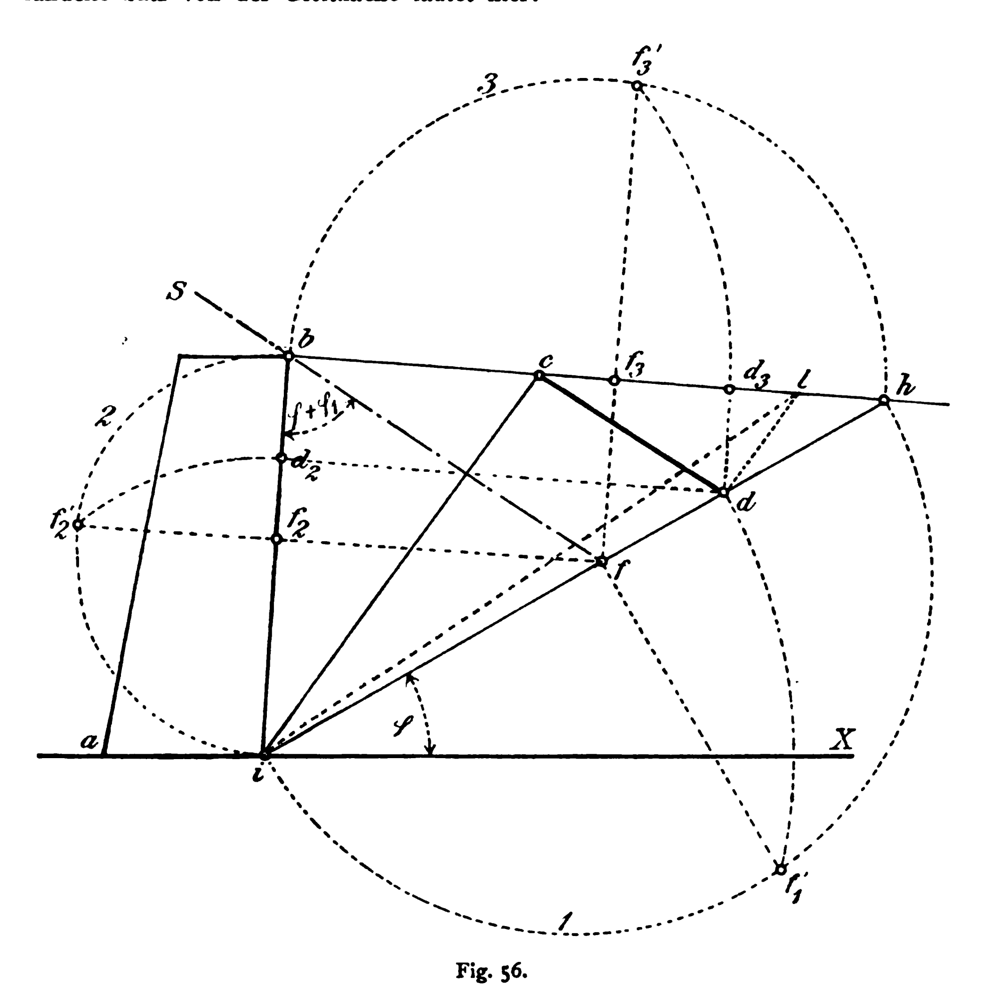


Fig. 56.

Die vom Erddruckmaß cd auf der natürlichen Böschung abgeschnittene Strecke id ist die mittlere Proportionale zwischen der Böschungslinie ih und der auf dieser von einer durch den obern Wandpunkt b gehenden Stellungslinie abgeschnittenen Strecke if. Das heißt

$$\overline{id}^2 = \overline{ih} \cdot \overline{if}. \tag{37}$$

Man ziehe dl parallel zur Gleitfläche ic. Dann ist (nach **11**, b)

$$\begin{array}{c} \text{Fl.}\,ibc = \text{Fl.}\,cdi \\ \text{Fl.}\,icl = \text{Fl.}\,cdi \\ \hline \text{Fl.}\,ibc = \text{Fl.}\,icl. \end{array}$$

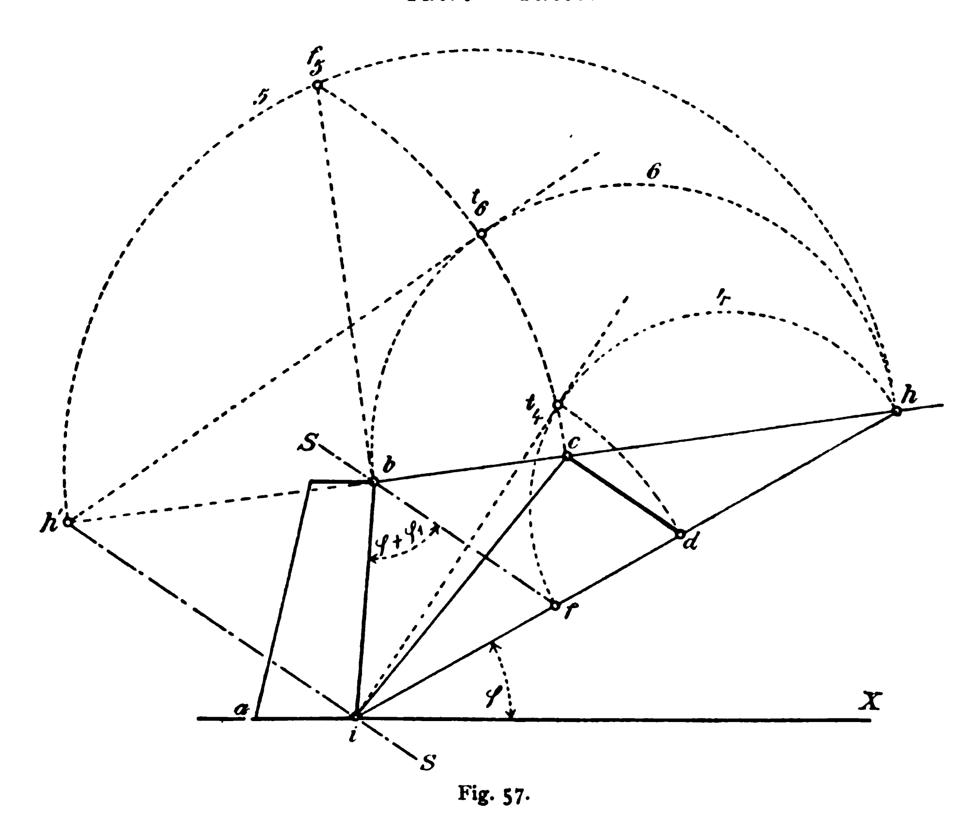


Fig. 57.

Die letztbezeichneten beiden Flächen haben gleiche Spitze in i und gleiche Höhe. Daraus folgt

$$\overline{bc} = \overline{cl}.$$

Ferner ist

$$\frac{\overline{id}}{\overline{ih}} = \frac{\overline{cl}}{\overline{ch}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ch}} = \frac{\overline{fd}}{\overline{dh}} = \frac{\overline{id} - \overline{if}}{\overline{ih} - \overline{id}}.$$

Das gibt

$$\overline{id} \cdot \overline{ih} - \overline{id}^2 = \overline{ih} \cdot \overline{id} - \overline{ih} \cdot \overline{if}$$

oder

$$\overline{id}^2 = \overline{ih} \cdot \overline{if},$$

was zu beweisen war.

Die mittlere Proportionale id kann in verschiedener Weise gefunden werden. Die Fig. 56—57 enthalten zusammen sechs Verfahren ihrer Darstellung, die eines Beweises für ihre Richtigkeit nicht bedürfen.

1) Das *Grundverfahren* (Fig. 56), *bei welchem ein Halbkreis über der Böschungslinie* geschlagen wird: Stellungslinie in b. $\overline{ff'_1}$ senkrecht zur $\overline{ih}$. $\overline{if'_1} = \overline{id}$ und $\overline{cd}$ parallel zur Stellungslinie. Dann ist $\overline{ic}$ die gesuchte Gleitfläche.

2) *Halbkreis über der Wandlinie*: $\overline{ff_2}$ parallel zur Erdlinie bh. $\overline{f_2 f'_2}$ senkrecht zur $\overline{bi}$. $\overline{if'_2} = \overline{id_2}$. $\overline{d_2 d}$ parallel der Erdlinie usw.

3) *Halbkreis über der Erdlinie*: $\overline{ff_3}$ parallel *zur Wandlinie* bi. $\overline{f_3 f'_3}$ senkrecht zur Erdlinie bh. $\overline{bf'_3} = \overline{bd_3}$. $\overline{d_3 d}$ parallel zur Wandlinie usw.

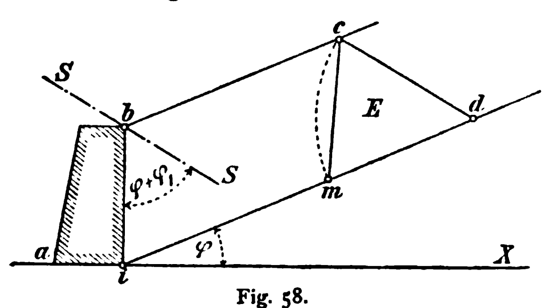


Fig. 58.

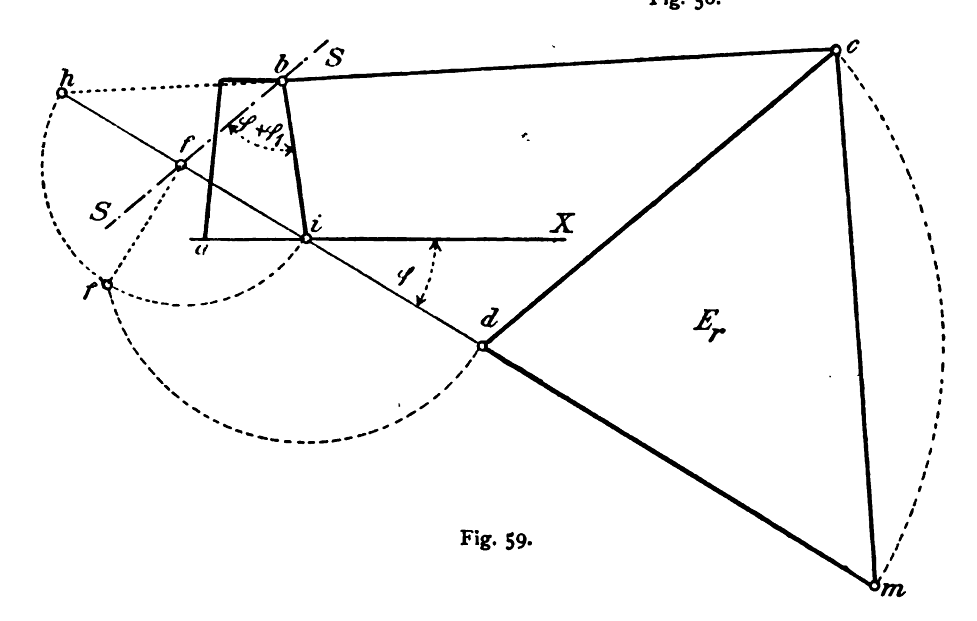


Fig. 59.

4) *Tangente an einen Halbkreis über der* $\overline{fh}$ (Fig. 57): Stellungslinie in b. Halbkreis über der $\overline{fh}$. Tangente $\overline{it_4}$ an den Kreis. $\overline{it_4} = \overline{id}$, usw.

5) *Halbkreis über der verlängerten Erdlinie*: Stellungslinie in i schneidet Verlängerung der Erdlinie in h'. Halbkreis über der $\overline{h'h}$. $\overline{bf_5}$ senkrecht zur $\overline{h'h}$. $\overline{h'f_5} = \overline{h'c}$. *Dieses und das 6. Verfahren sind die einzigen, bei welchen der obere Punkt c der Gleitfläche unmittelbar gefunden wird*, d. h. ohne vorherige Bestimmung des Punktes d.

6) *Tangente an einen Halbkreis über der Erdlinie*: Zuerst wie 5). Halbkreis über der $\overline{bh}$. Tangente $\overline{h't_6}$ an den Kreis. $\overline{h't_6} = \overline{h'c}$, usw.

b. Die Erdlinie ist der Böschungslinie parallel. Hier liegt der Schnittpunkt h der Erdlinie und Böschungslinie in unendlicher Ferne, ebenso der Endpunkt c der Gleitfläche. Das Erddruckmaß cd (Fig. 58) ist unveränderlich. Das *Druckdreieck* kann also für jeden beliebigen Punkt c in bekannter Weise gezeichnet werden.

c. Größe des ruhenden Erddruckes. Hierbei sind φ und φ_1 negativ zu nehmen (Fig. 59). Sonst kann die Darstellung der Gleitfläche *cd* und des Druckdreiecks *cdm*, wie bekannt, durchgeführt werden. Es ist dann

$$E_r = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } cdm.$$

Über die Bedeutung des ruhenden Erddruckes für praktische Aufgaben vgl. unter **12**, c.

d. Die Erde ist zwischen zwei Wände eingeschlossen[80]. Die beiden Wandlinien seien *ib* und *i'b'* (Fig. 60). Der auf *ib* wirkende Erddruck *E* ist zu bestimmen. Wäre nun der Abstand zwischen den Kronenpunkten *b* und *b'* so

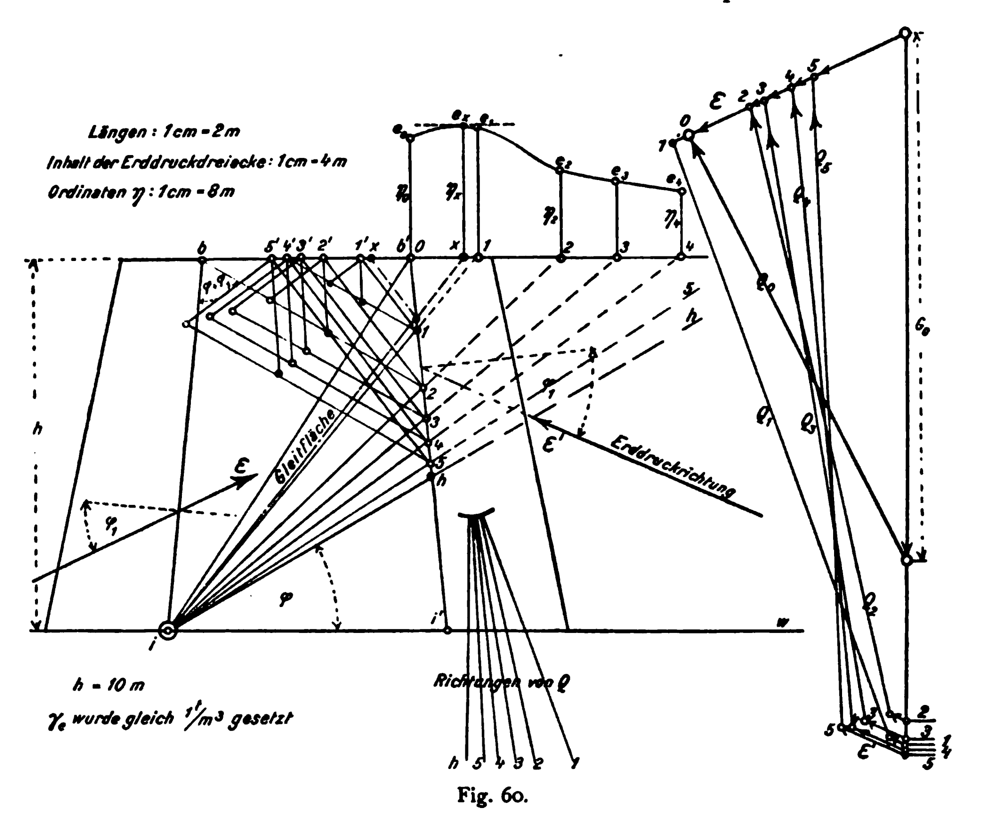


Fig. 60.

groß, daß die für *ib* und *i'b'* (nach Vorigem) zu zeichnenden Gleitflächen *sich nicht schneiden* würden, so könnte man jede der Gleitflächen ohne weiteres finden. In der Fig. 60 ist aber jener Abstand dazu zu klein. Deshalb muß wie folgt verfahren werden.

Auf ein beliebig gewähltes Rutschprisma *b—i—4—4'* wirken, im Falle des Gleichgewichtes, vier äußere Kräfte. Das sind 1) die beiden, den betreffenden Erddrücken E_4 und E_4' an Größe gleichen Widerstände der Wände *ib* und *i'b'* sowie

[80] Winkler. Vorträge über die Theorie des Erddruckes, gehalten an der Königl. techn. Hochschule in Berlin. 1880. S. 15.

2) das in seiner lotrechten Schwerlinie angreifende Gewicht G_4 des Prismas und der Gegendruck Q_4 der Gleitfläche i—4. Unter der Annahme, daß die zugehörige Gleitfläche 4—4′ die Wandlinie ib nicht trifft, kann E'_4 in bekannter Weise dargestellt werden. Es bleibt dann noch E_4 zu ermitteln.

Um den größten Wert von E zu finden, wende man ein Probierverfahren an, das demjenigen unter **16**, b ähnlich ist: Für die Gleitfläche ib und die außerdem beliebig angenommene Gleitflächen i—1, i—2, i—3, i—4 usw. berechnet man die Größen G und E'. Die Mittelkräfte aus diesen beiden äußeren Kräften zerlegt man nach den gegebenen Richtungen von E und Q. Damit erhält man die *Kraftvierecke* für das Gleichgewicht der am betreffenden Rutschprisma wirkenden äußeren Kräfte E, E', G und Q. Nur für die Gleitfläche ib' erhält man ein Kraftdreieck, weil für sie die Größe $E'_0 = 0$ ist. Die aus dem Kraftdreiecke und den Kraftvierecken gefundenen Werte von E trägt man den Fußpunkten 0, 1, 2, 3, 4 usw. der betreffenden Gleitflächen als Ordinaten η auf. Damit erhält man eine durch die Endpunkte e_0 bis e_4 verlaufende krumme Linie, deren größte Ordinate η_x den Fußpunkt x bestimmt, durch welchen *die gefährlichste Gleitfläche* ix verläuft, mit deren Hilfe der größte Erddruck E_x berechnet werden kann.

In der Fig. 60 ergab sich $\eta_x = 28\, m^2$, wobei γ_e vorläufig gleich 1,0 t/m^3 gesetzt worden war. Ist γ_e z. B. gleich 1,5 t/cm^2, so gibt das für 1 m Wandtiefe

$$E_x = 28 \cdot 1{,}5 = 42^t.$$

Die Winkel φ und φ_1 sind dabei beide gleich 30° angenommen worden.

18. Ebene Wand und gebrochene Erdlinie.

a. Gleitfläche und Druckdreieck. Welche Gestalt auch die gebrochene Erdlinie hat, der Endpunkt c der Gleitfläche wird in irgend einer ihrer Seite zu liegen kommen. Sobald es feststeht, welche der Seiten dies voraussichtlich sein wird, läuft die Aufgabe die Gleitfläche zu finden darauf hinaus, *den gebrochenen Umriß der vor ihr liegenden Fläche in ein inhaltsgleiches Dreieck zu verwandeln*, damit der durch die Gl. (37) ausgedrückte Satz (unter **17**, a) zur Geltung kommen kann. Das soll zuerst an einem Beispiele veranschaulicht werden.

b. Erstes Beispiel. *Die Stützmauer in* Fig. 61 *begrenzt den Querschnitt eines Straßen- oder Eisenbahndammes. Gleitfläche und Druckdreieck sollen gezeichnet werden.*

Angenommen, der Endpunkt c der Gleitfläche falle in die rechtseitige Böschung des Dammes. Dann ist, um auf den Grundfall der geraden Erdlinie zu kommen, der gebrochene Umriß der Fläche $ibuv$ in ein Dreieck isv zu verwandeln, dessen Spitze s in die Verlängerung der Seite hv fällt. Das ist (in bekannter Weise) geschehen: Durch den Eckpunkt u eine Parallele zur $\overline{bv}$, von welcher die Verlängerung der Wandlinie ib in e geschnitten wird. Durch e eine Parallele zur $\overline{iv}$, welche die Verlängerung der $\overline{hv}$ im gesuchten Punkte s trifft. Es ist dann

$$\text{Fl.}\,\triangle isv = \text{Fl.}\,ibuv.$$

Die Flächenteilung kann jetzt nach dem Satze von der Gleitfläche (**17**, a) erfolgen: Parallele zur Stellungslinie durch s. Diese trifft die Böschungslinie im Punkte f. Bestimmt man also die Strecke id als mittlere Proportionale zwischen

den Abschnitten *ih* und *if*, so wird damit der Punkt *d* des Druckdreiecks, und durch Zeichnen des Erddruckmaßes *dc* auch der gesuchte Punkt *c* der Gleitfläche

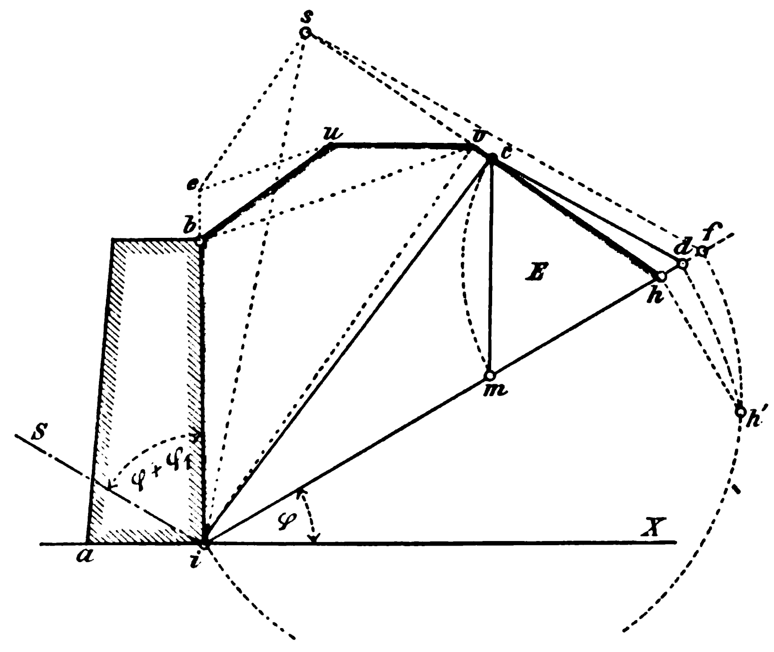


Fig. 61.

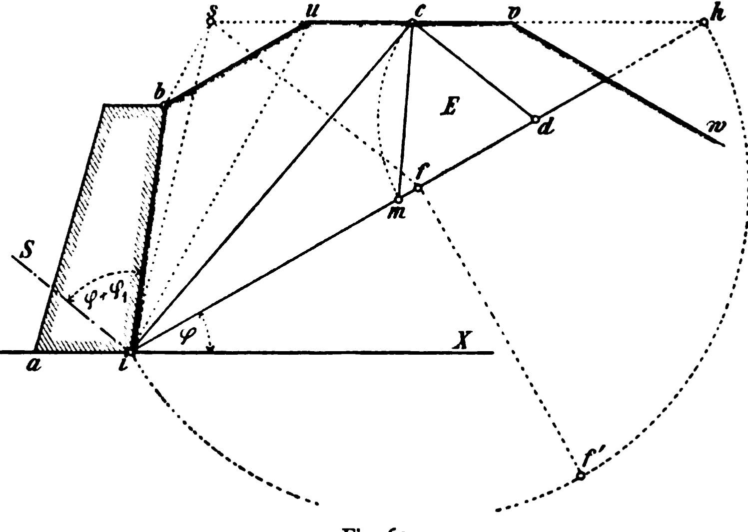


Fig. 62.

gefunden (Fig. 61). Der Punkt *f* fiel hierbei außerhalb der $\overline{ih}$. Deshalb mußte der Halbkreis über der $\overline{if}$ geschlagen werden.

c. Zweites Beispiel. In der Fig. 62 ist für einen etwas anderen Dammquerschnitt als in Fig. 61 nochmals die Gleitfläche gezeichnet. Dabei ist ihr Endpunkt *c* in die Seite *uv* gefallen und der Halbkreis mußte über der Böschungslinie *ih* geschlagen werden.

Wie schon (unter **11**, a) bemerkt wurde, rührt das erste Verfahren zur Darstellung der Gleitfläche für ebene Wand und gebrochene Erdlinie von Poncelet her. Saint-Guilhelm[81] bewies später, daß das Verfahren auch dann noch anwendbar bleibt, *wenn zufällig der Endpunkt c mit einer Ecke der gebrochenen Erdlinie zusammenfällt.* Denn in diesem Sonderfalle ist es gleich, welche der beiden die bezeichnete Ecke bildenden Seiten der Erdlinie man zur Flächenverwandlung heranzieht.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß bei sehr unregelmäßiger Vieleckgestalt der Erdlinie das von Winkler angegebene Probierverfahren (**16**, b) das bequemste ist.

19. Gleichmäßig verteilte Überlasten auf der geraden Erdlinie.

a. Die vorkommenden Arten von Überlasten. Wo eine völlig gerade Erdlinie nicht vorliegt, ist diese — wie bei der Belastungslinie eines Gewölbes — durch Ausgleichen der Unebenheiten zu schaffen. Größere Unebenheiten sind als Überlasten zu behandeln. Das Erdreich zwischen der Wand und der natürlichen Böschung soll nach dem Vorhergegangenen von *gleichartiger Beschaffenheit* sein. Von Natur findet sich ein solches Erdreich auf einer Baustelle selten. In der Regel muß es künstlich geschaffen werden. Liegt jenseits der natürlichen Böschung *gewachsener* Boden, so ändert das nichts an den bisherigen Ergebnissen der Theorie, es wird dadurch vielmehr ein Vorteil geschaffen insofern, als der gewachsene Boden — ohne die Standfestigkeit der Stützmauer zu beeinflussen — Überlasten verschiedener Art tragen kann, wenn diese im gewachsenen Boden gehörig gegründet und dabei die zulässigen Grenzen des Bodendruckes nicht überschritten werden.

Eine wesentlich andere Sachlage tritt ein, wenn die Erdfläche innerhalb der Strecke zwischen Wand und Böschung Überlasten aufnehmen soll, die nicht vom gewachsenen Boden getragen werden. Solche Überlasten sind dann nur zulässig, wenn sie — in gleichartige Erde verwandelt gedacht — die vorausgesetzte Gleichartigkeit des gesamten Erdreiches, einbegriffen die Überlasterde, nicht stören. Eine Störung würde aber eintreten, wenn die Überlast eine schwere *Einzellast* wäre, die sich nur auf eine sehr kleine Strecke der Erdlinie verteilte, so daß ihr Druck auf die Flächeneinheit die zulässigen Grenzen überstiege. Derartige Einzellasten dürfen daher nicht zugelassen werden, jedenfalls aber wäre ihr Einfluß auf die Größe des Erddruckes aus obigen Gründen nur unsicher zu bestimmen.

Eine praktisch ausreichend genaue Berechnung des Einflusses von Überlasten läßt sich durchführen, wenn man dabei von der Annahme durchlaufender, *gleich-*

---

[81] de Saint-Guilhelm. Mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharge. Ann. des ponts et chauss. 1858. I. S. 319—350.

mäßig über die Erdlinie verteilter Teil- und Vollbelastungen ausgeht, wie sie bei der Lagerung von Baustoffen, oder infolge des Verkehrs von Fahrzeugen auf Gleisen und dergl. entstehen. Sobald man den Einfluß von solchen, in Erde verwandelt gedachten gleichmäßigen Überlasten berechnet hat (wie das weiterhin geschieht), ist damit noch der *Einfluß von Einzellasten* gegeben, falls diese sich über eine ausreichend breite Strecke der Erdfläche verteilen.

b. Gleitfläche und Druckdreieck.

1. *Ersatz einer Teilbelastung durch eine gleichwertige Erdlinie.* Über einem Teile der Erdlinie lagere eine gleichmäßig verteilte, *in Erde von der Höhe* h_0 *verwandelte* Überlast aus festen oder losen Stoffen, die *nicht aus Erde* bestehen, und in denen das Eintreten etwaiger Gleitflächen nicht vorausgesetzt werden kann. Die Überlastlinie ist durch die Buchstaben uvw bezeichnet (Fig. 63). Eine im Erdreich ibh sich bildende Gleitfläche ie kann sich also in der Überlast *nicht*

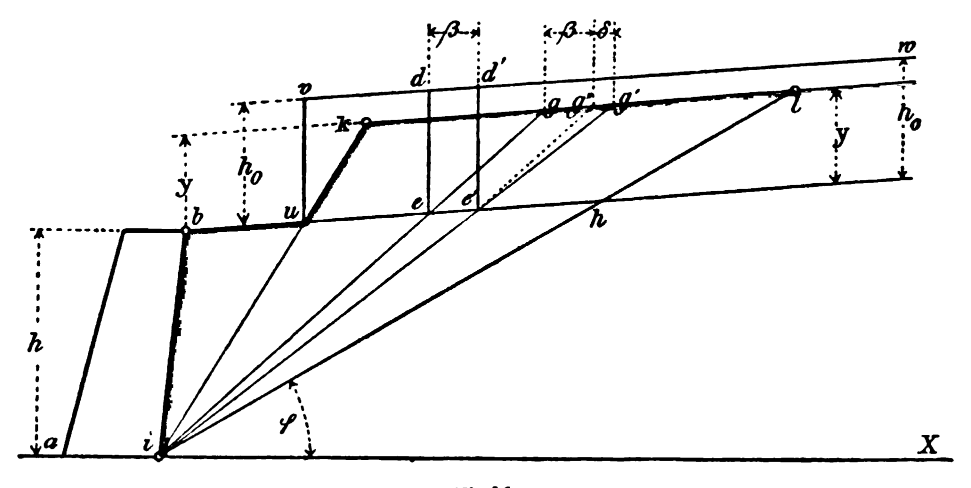


Fig. 63.

fortsetzen, in dieser ist eine *lotrechte* Trennungslinie ed vorauszusetzen, so daß auf dem Gleitprisma ibe nur der Teil $uvde$ der Überlast zur Wirkung gelangen kann. Das Verfahren zur Darstellung einer Gleitfläche ie läuft nun im allgemeinen darauf hinaus, *an Stelle des Umrisses* uvw *der Überlastlinie den gleichwertigen Umriß* ukl *einer Erdlinie zu setzen, derart daß für jede beliebige Lage einer Gleitfläche* ie *das Gewicht der Fläche* $ibuvde$ *gleich dem Gewichte der Fläche* $ibukge$ *ausfällt.* In diesem Falle kann die mit *gelber* Farbe ausgezeichnete Fläche unmittelbar zur Darstellung der wirklichen Gleitfläche dienen (nach **18**, a). Weil die Geraden vw und kl der Erdlinie parallel sind, so kommt es also nur darauf an, die Höhe y der bezeichneten Ersatzfläche zu finden. Das soll rechnerisch und graphisch geschehen.

Neben der Gleitfläche ie, deren Verlängerung die Ersatzlinie kl in g schneidet, wird eine zweite Gleitfläche ie' gelegt und bis zum Punkte g' der Ersatzlinie verlängert. Ferner sei die wagerechte Breite der Überlast zwischen e und e' gleich β.

Endlich sei $\overline{e'g''}$ parallel zur $\overline{eg}$ und die wagerechte Projektion der Strecke $g''g' = \delta$ (Fig. 63). Dann ist anzuschreiben:

$$\text{Fl. } edd'e' = \beta \cdot h_0$$
$$\text{Fl. } egg'e' = \beta y + \delta/2 \cdot y.$$

Bei richtiger Festsetzung der Ersatzlinie kl müssen obige beide Flächen für jede Lage der Gleitflächen gleich groß sein, also

$$y\left(\beta + \frac{\delta}{2}\right) = \beta h_0.$$

Es verhält sich aber

$$\frac{\delta}{y} = \frac{\beta}{h},$$

wenn h die lotrechte Höhe der Wand ist. Daraus folgt

$$y + \frac{y^2}{2h} = h_0$$

oder

$$(y + h)^2 = h(h + 2h_0). \qquad (38)$$

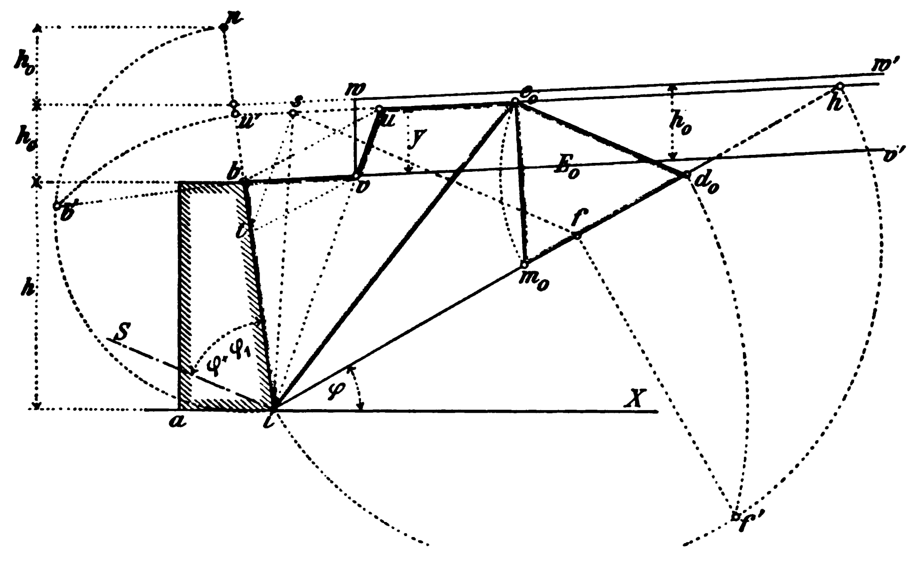


Fig. 64.

Danach ist $y + h$ als mittlere Proportionale der Strecken h und $(h + 2h_0)$ zu zeichnen. Das ist in dem Beispiele der Fig. 64 ausgeführt.

Die Wandlinie ist nach oben bis zum Punkte n verlängert, so daß die lotrechte Projektion der Strecke $\overline{in}$ gleich $(h + 2h_0)$ wird. Über der $\overline{in}$ ein Halbkreis. Eine Senkrechte zur $\overline{in}$ in b trifft den Kreis in b'. Die Sehne ib' ist also mittlere Proportionale zwischen den Strecken ib und in. Macht man danach $\overline{ib'} = \overline{iu'}$, wo u' ein Punkt der $\overline{in}$ ist, so braucht man, um die Ersatzlinie in einer Höhe y über der Erdlinie zu erhalten, zu dieser durch u' nur eine Parallele zu führen.

Gleitfläche und Druckdreieck bestimmt man nach **18**, a; nachdem vorerst die Fläche *ibvuh* in die gleichwertige Fläche *ish* verwandelt worden ist. Der Punkt *s* findet sich aus

$$\overline{vt} \parallel \overline{ub}$$

und

$$\overline{ts} \parallel \overline{iu},$$

denn dadurch ist

$$\triangle isu = \triangle ibv$$

gemacht worden.

Weiter: Durch *s* Parallele zur Stellungslinie der Wand *ib*. Über der Böschungslinie *ih* der Halbkreis usw. So findet man das *Erddruckmaß* $k_0 d_0$ mit der *Gleitfläche* ie_0 und dem *Druckdreieck* $d_0 e_0 m_0$ in bekannter Weise.

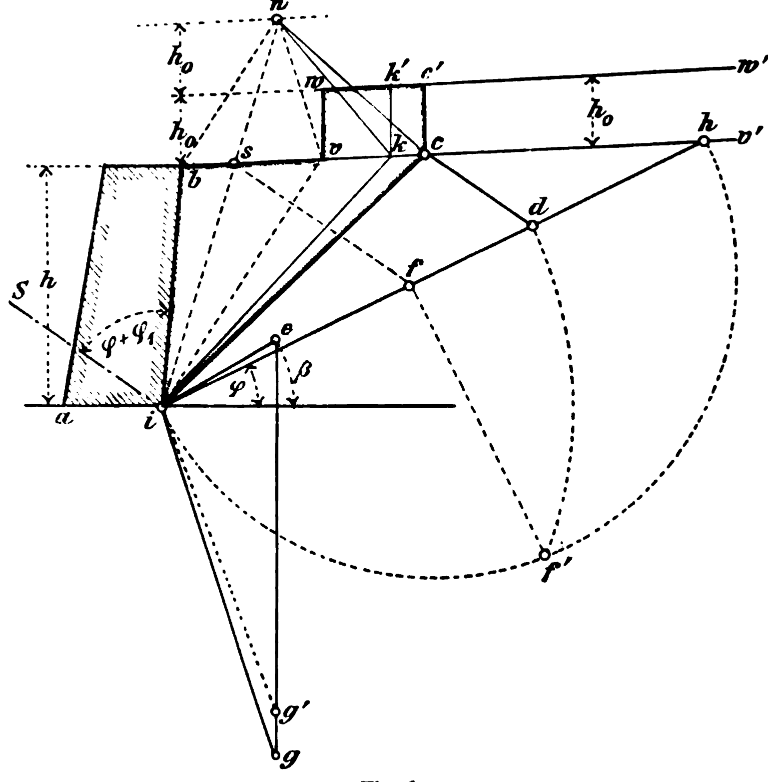


Fig. 65.

2. *Ersatz des Überlastprismas einer Teilbelastung durch ein gleichwertiges Dreieck.* (Fig. 65.) In der Höhe $2\,h_0$ über der Erdlinie *bh* ist ein Punkt *n* so zu bestimmen, daß die Flächen der beiden Dreiecke *inv* und *ibv* einander gleich werden. Das geschieht durch Ziehen der

$$\overline{bn} \parallel \overline{iv}.$$

Verbindet man darauf *i* und *n* durch eine Gerade, und trifft diese die Erdlinie im Punkte *s*, so kann durch *s* eine Parallele zur Stellungslinie der Wand

gelegt und für einen Halbkreis über der Böschungslinie *ih* das Erddruckmaß *cd* und *die Gleitfläche ic* in bekannter Weise gefunden werden (**18**, a). Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens folgt:

Es wurde $\overline{bn} \parallel \overline{iv}$ gemacht, deshalb ist

$$\text{Fl.}\,\triangle inv = \text{Fl.}\,\triangle ibv.$$

Ferner ist $\text{Fl.}\,\triangle vnc = \text{Fl.}\,\triangle vwc'c$

dazu $\text{Fl.}\,\triangle ivc = \text{Fl.}\,\triangle ivc$

gibt $\text{Fl.}\,\triangle inc = \text{Fl.}\,ibvwc'c.$ (39)

Die Gl. (39) gilt für jede beliebige Lage einer Gleitfläche *ic*. Die beiden Dreiecke *inc* und *isc* haben gleiche Spitze *c* und gleiche Höhe, verhalten sich also wie ihre Grundlinie:

$$\frac{\text{Fl.}\,\triangle inc}{\text{Fl.}\,\triangle isc} = \frac{\overline{in}}{\overline{is}} = \frac{h + 2h_0}{h}. \quad (40)$$

Trägt man nun (wie bereits früher unter **13**, b, Fig. 50 geschehen) das Krafteck *ieg* aus Erddruck E_0, Gewicht G_0 des Gleitprismas *ibvwc'c* und Gegendruck Q_0 der Gleitfläche in *i* so an, daß die lotrechte Seite *eg* das Gewicht des Gleitprismas und $\overline{gg'}$ die Verkleinerung dieses Gewichtes, bei verschwindend kleiner Drehung der Gleitfläche *ic* in die Lage *ik* darstellt, so ist weiter anzuschreiben:

$$\frac{\overline{eg}}{\overline{gg'}} = \frac{\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,\triangle inc}{\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,icnk} = \frac{\text{Fl.}\,\triangle inc}{\text{Fl.}\,\triangle ick + \text{Fl.}\,cnk}$$

oder

$$\frac{\overline{eg}}{\overline{gg'}} = \frac{\text{Fl.}\,\triangle inc}{\text{Fl.}\,\triangle ick\left(1 + \frac{2h_0}{h}\right)} = \frac{h \cdot \text{Fl.}\,\triangle inc}{(h + 2h_0)\,\text{Fl.}\,\triangle ick}.$$

Ferner wenn $\overline{ig} = \overline{ic}$ gemacht worden ist (Fig. 50 unter **13**, b)

$$\frac{\overline{eg}}{\overline{gg'}} = \frac{\text{Fl.}\,\triangle ieg}{\text{Fl.}\,\triangle igg'} = \frac{\text{Fl.}\,\triangle icd}{\text{Fl.}\,\triangle ick}.$$

Aus den letzten beiden Ausdrücken folgt:

$$\text{Fl.}\,\triangle icd = \text{Fl.}\,\triangle inc\left(\frac{h}{h + 2h_0}\right).$$

Das gibt schließlich in Verbindung mit der Gl. (40)

$$\text{Fl.}\,\triangle icd = \text{Fl.}\,\triangle isc, \quad (41)$$

d. h. der Punkt *s* kann in bekannter Weise (**18**, a) dazu benutzt werden, um *die Gleitfläche ic aus der Überlast* mit Hilfe der mittlern Proportionalen *id* der Strecken *if* und *ih* darzustellen.

Bei dem vorstehenden Verfahren muß das *Druckdreieck* besonders dargestellt werden. Das ist in Fig. 66 geschehen, worin auch nochmals die Gleitfläche gezeichnet ist, also $\overline{bn} \parallel \overline{iv}$; durch *s* Parallele *sf* zur Stellungslinie, usw. bis der Endpunkt *c* der Gleitfläche gefunden ist. Darauf folgt die *Darstellung des Druckdreiecks*:

Man verbinde n mit dem Schnittpunkte h der Erd- und Böschungslinie. Ziehe durch c zur $\overline{in}$ eine Parallele, welche die $\overline{nh}$ im Punkte u trifft. Mache $\overline{cd} = \overline{dm}$. Dann ist $\triangle udm$ *das Druckdreieck des Erddruckes* E_0 *für die Überlast.* Also:

$$E_0 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,\triangle udm$$

oder

$$E_0 = \gamma_e \cdot 1 \cdot F_0, \tag{42}$$

wenn F_0 *den Inhalt des Druckdreiecks für Überlast* bezeichnet.

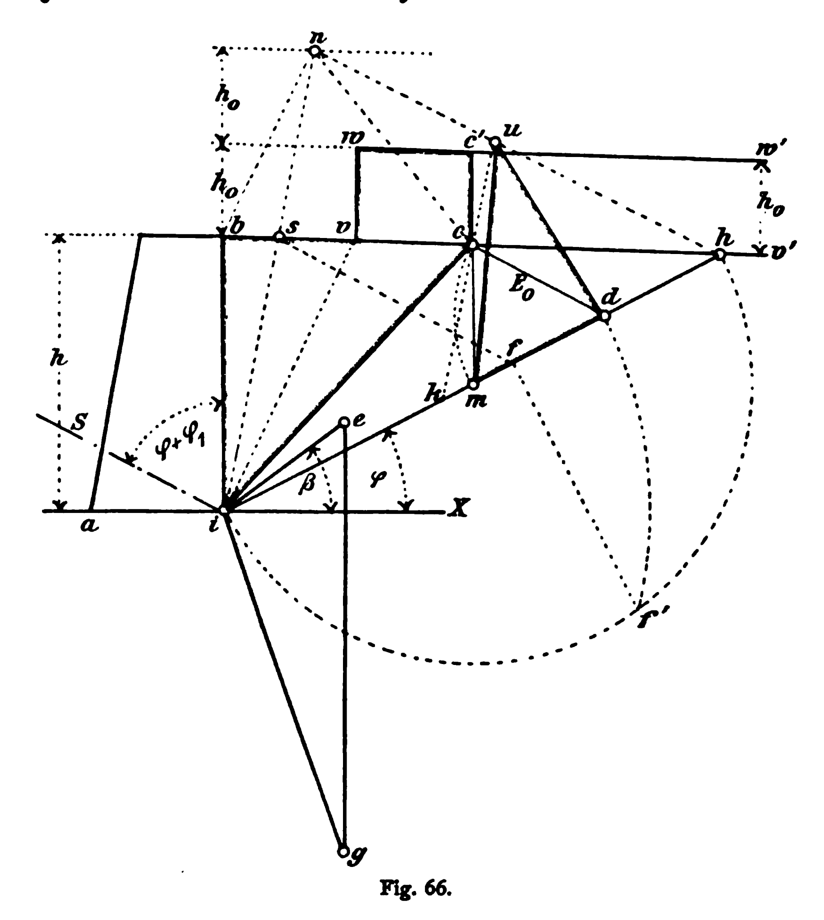


Fig. 66.

Der Beweis für die Richtigkeit der Darstellung ergibt sich in ähnlicher Weise, wie er (unter **13**, c) für beliebige Wand- und Erdlinie gegeben worden ist. Mit Bezug auf die Fig. 66 ist anzuschreiben:

$$\frac{E_0}{G_0} = \frac{\overline{ie}}{\overline{eg}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{id}} = \frac{\overline{md}}{\overline{id}} = \frac{\text{Fl.}\,\triangle cdm}{\text{Fl.}\,\triangle icd} = \frac{\text{Fl.}\,\triangle cdm}{\text{Fl.}\,\triangle isc}.$$

Das gibt mit Bezug auf Gl. (40)

$$E_0 = G_0 \cdot \frac{\text{Fl.}\,\triangle cdm}{\text{Fl.}\,inc\left(\dfrac{h}{h+2h_0}\right)}.$$

Es ist aber auch

$$G_0 = 1 \cdot \gamma_e \cdot \text{Fl.}\, inc,$$

so daß aus der Verbindung der letzten beiden Ausdrücke

$$E_0 = 1 \cdot \gamma_e \cdot \text{Fl.}\, cdm \left(\frac{h + 2h_0}{h}\right)$$

folgt.

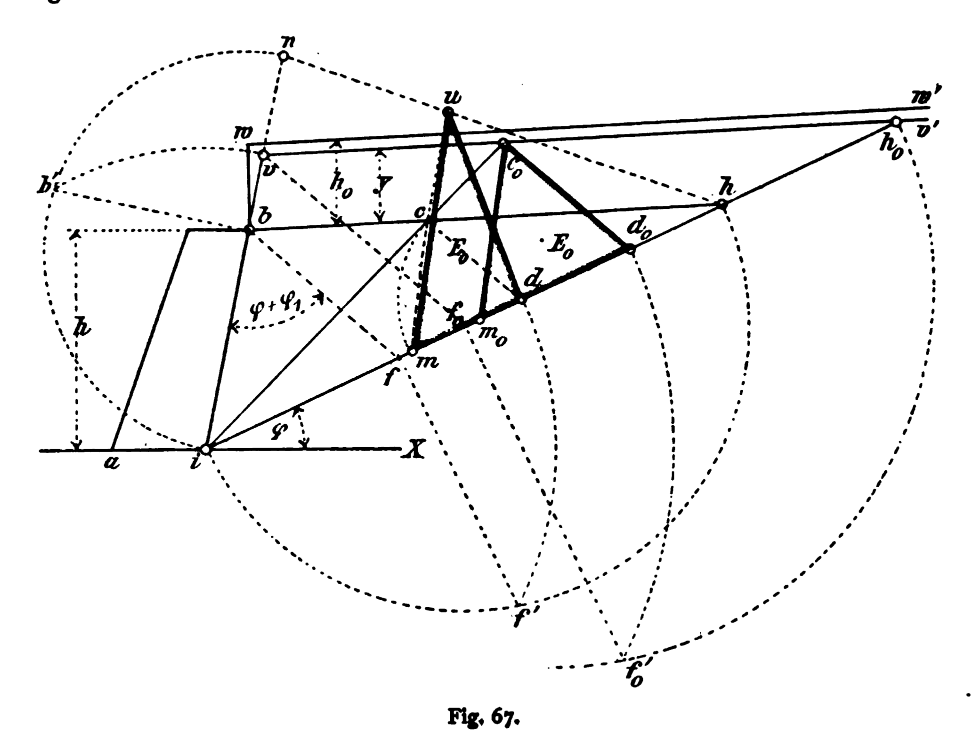


Fig. 67.

Zieht man jetzt noch die Hilfslinie uc und verlängert sie bis zum Schnittpunkte k in der Böschungslinie, so erhält man für das Verhältnis des Druckdreiecks udm zum $\triangle cdm$:

$$\frac{\text{Fl.}\,\triangle udm}{\text{Fl.}\,\triangle cdm} = \frac{\overline{uk}}{\overline{ck}} = \frac{\overline{ni}}{\overline{si}} = \frac{h + 2h_0}{h},$$

wodurch die Gleichung übergeht in

$$E_0 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,\triangle udm = \gamma_e \cdot 1 \cdot F_0, \qquad (43)$$

was zu beweisen war.

c. **Vollbelastung.** Darunter wird eine gleichmäßig verteilte Überlast verstanden, die bis zum obern Wandpunkte b reicht. Für diesen Fall gelten, wie die Fig. 67 veranschaulicht, die beiden unter a beschriebenen Verfahren ebenfalls.

Der *frühere Punkt v* der Teilbelastung fällt jetzt mit dem Wandpunkte b zusammen. Die *Ersatzlinie* begrenzt danach ein Gleitprisma isc_0, das dem Gleit-

prisma *ibc ohne Überlast* ähnlich ist. Die Gleitflächen ic und ic_0 für E und E_0 fallen also in einer einzigen Geraden zusammen. Demnach ist anzuschreiben:

$$\frac{E_0}{E} = \frac{(\overline{c_0 d_0})^2}{(\overline{cd})^2} = \frac{(\overline{id_0})^2}{(\overline{id})^2} = \frac{(h+y)^2}{h^2}.$$

Nach Gl. (38) ist aber

$$(h+y)^2 = h(h+2h_0).$$

Das gibt für *volle* Überlast

$$E_0 = E\left(\frac{h+2h_0}{h}\right). \qquad (44)$$

Dasselbe ist natürlich aus der Darstellung des *Ersatzdreiecks* nachzuweisen. Hierbei fällt der Punkt n in die Verlängerung der Wandlinie und an Stelle des Punktes s tritt jetzt der Punkt b. Daraus folgt, daß bei *voller* Überlast das $\triangle cdm = F$, d. h. gleich dem Druckdreieck für E ist. Mithin darf nach Gl. (42)

$$E = E\left(\frac{h+2h_0}{h}\right)$$

angeschrieben werden.

Der *allein infolge der vollen Überlast* verursachte Erddruck E_u'' folgt daraus mit

$$E_u'' = E_0 - E = E\left[\left(\frac{h+2h_0}{h}\right) - 1\right]$$

oder

$$E_u'' = \frac{2Eh_0}{h}. \qquad (45)$$

Wie man mit Hilfe der Druckdreiecke für gleichmäßige Voll- und Teilbelastung den *Einfluß von Einzellasten auf die Erddruckgröße* darstellen kann, wird unter **21** erläutert.

20. Gleitfläche für einen beliebigen Punkt der Erdlinie.

1. Das hierher gehörige Darstellungsverfahren hat zuerst Holzhey[82] angegeben. Es ist von besonderer Wichtigkeit, wenn zwischen der Mauerkrone und dem Punkte p *Überlasten* irgendwelcher Art liegen, die man in *gleichwertige Erdflächen* verwandeln kann, derart, daß für jede durch p verlaufende Gleitfläche pi_1 (Fig. 68) das Gleitprisma als ein Dreieck $i_1 sp$ erscheint. Die Gleitfläche für den Punkt p findet man dann nach folgendem Verfahren:

Man ziehe durch p zwei Parallele, die eine zur Stellungslinie und die andere zur Böschungslinie. Die Wandlinie oder deren Verlängerung wird von der ersten Parallelen im Punkte n, von der zweiten im Punkte e getroffen. Bezeichnet dann i_1 den Fußpunkt der Gleitfläche, so ist *die Strecke ei_1 gleich der mittlern Proportionalen zwischen den Abschnitten es und en der Wandlinienrichtung.*

Daraus folgt das graphische Verfahren: Je nachdem der Punkt n *über* oder *unter* dem Punkte s liegt, schlage man einen Halbkreis über der $\overline{en}$ oder $\overline{es}$. In s

[82] Holzhey. Beitrag zur Theorie des Erddruckes und graphische Bestimmung der Futtermauern. 1871. Sonderdruck aus Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- u. Ingenieurwesens.

oder n errichte man zur Wandlinie eine Senkrechte. Wenn diese den Kreis im Punkte s' schneidet, so ist

$$(\overline{es'})^2 = \overline{en} \cdot \overline{es}.$$

Macht man also

$$\overline{es'} = \overline{ei_1},$$

so ist

$$(\overline{ei_1})^2 = \overline{en} \cdot \overline{es}. \tag{46}$$

Für den Beweis der Richtigkeit des obigen Verfahrens ziehe man durch den Fußpunkt i_1 der Gleitfläche eine Böschungslinie. Diese wird von einer durch s

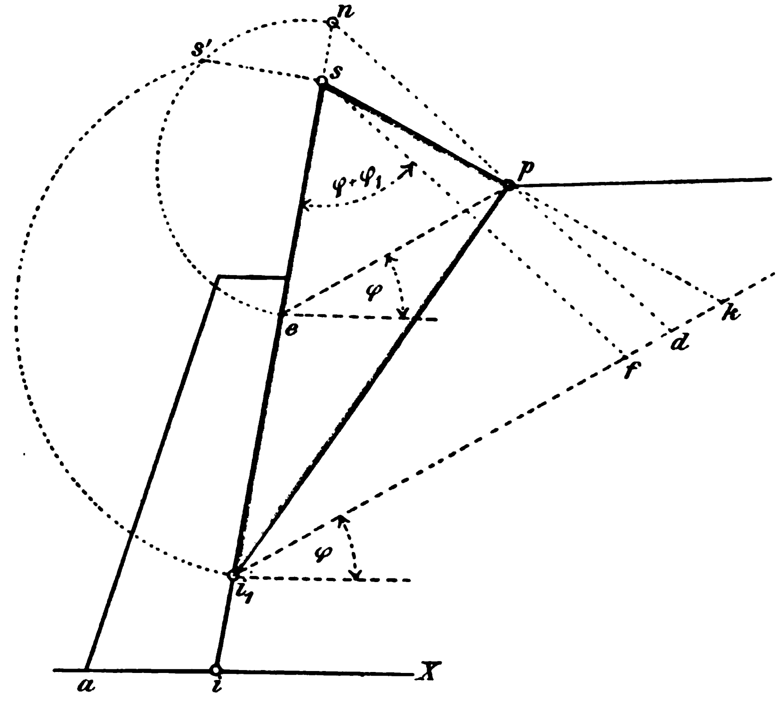


Fig. 68.

gelegten Stellungslinie und den Verlängerungen der beiden Geraden nc und sc der Reihe nach in den Punkten f, d und k getroffen (Fig. 68). Nach dem Satze von der Gleitfläche für den Grundfall, also nach Gl. (37) ist jetzt anzuschreiben:

1) $$\overline{i_1 d}^2 = \overline{i_1 f} \cdot \overline{i_1 k},$$

wenn $\overline{sk}$ als die zugehörige gerade Erdlinie betrachtet wird.

Aus 1) folgt

$$\overline{i_1 d}^2 - \overline{i_1 d} \cdot \overline{i_1 k} = \overline{i_1 f} \cdot \overline{i_1 k} - \overline{i_1 d} \cdot \overline{i_1 k}$$

oder

$$\overline{i_1 d}(\overline{i_1 d} - \overline{i_1 k}) = \overline{i_1 k}(\overline{i_1 f} - \overline{i_1 d}).$$

Daraus erhält man

2) $$\frac{\overline{i_1 d}}{\overline{i_1 k}} = \frac{\overline{fd}}{\overline{dk}}.$$

Ferner wegen Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke:

$$\frac{\overline{fd}}{\overline{dk}} = \frac{\overline{sp}}{\overline{pk}} = \frac{\overline{es}}{\overline{ei_1}}.$$

Das gibt in Verbindung mit 2)

3) $$\frac{\overline{es}}{\overline{ei_1}} = \frac{\overline{i_1 d}}{\overline{i_1 k}}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $i_1 s f$ und $i_1 n d$ folgt

4) $$\frac{\overline{i_1 n}}{\overline{i_1 s}} = \frac{\overline{i_1 d}}{\overline{i_1 f}}.$$

3) und 4) miteinander multipliziert gibt

$$\frac{\overline{es} \cdot \overline{i_1 n}}{\overline{ei_1} \cdot \overline{i_1 s}} = \frac{(\overline{i_1 d})^2}{\overline{i_1 k} \cdot \overline{i_1 f}}$$

oder nach 1)

$$\frac{\overline{es}(\overline{ei_1} + \overline{en})}{\overline{ei_1}(\overline{ei_1} + \overline{es})} = 1.$$

Daraus folgt schließlich die Gl. (46) mit

$$(\overline{ei_1})^2 = \overline{en} \cdot \overline{es},$$

was zu beweisen war.

2. Ein zweiter Beweis der obigen Darstellung wird in Fig. 69 gegeben[83]. $\overline{ce}$ und $\overline{cg}$ sind, wie vorher, die beiden Parallelen zur Stellungslinie und Böschungslinie. Man verlängere die $\overline{cg}$ über g hinaus, bis sie eine durch d_0 zur $\overline{cd}$ gelegte Parallele im Punkte c_0 trifft. Dann folgt aus der Gleichheit der Dreiecke cdd_0 und cc_0d_0 die Flächengleichheit der Dreiecke cc_0d_0 und cbd_0, weil nach dem Satze von der Gleitfläche (**13**, b) auch die Dreiecke cdd_0 und cbd_0 flächengleich sein müssen. Es muß demnach die Gerade c_0b der Gleitfläche d_0c parallel sein.

Danach erhält man

$$\frac{\overline{gb}}{\overline{gd_0}} = \frac{\overline{bc_0}}{\overline{cd_0}}.$$

Ebenso

$$\frac{\overline{bc_0}}{\overline{cd_0}} = \frac{\overline{gc_0}}{\overline{gc}} = \frac{\overline{gd_0}}{\overline{ge}}.$$

Daraus

$$\frac{\overline{gb}}{\overline{gd_0}} = \frac{\overline{gd_0}}{\overline{ge}}$$

oder $$(\overline{gd_0})^2 = \overline{ge} \cdot \overline{gb},$$

---

83 WINKLER. Über Erddruck auf gebrochene und gekrümmte Wandflächen. Centralbl. d. Bauverw. 1885. S. 74.

womit der obige Satz von der mittlern Proportionalen (mit etwas anderer Buchstabenbezeichnung) nochmals bewiesen ist. Der Satz gilt (wie gesagt) *für jeden Punkt einer geraden oder krummen Erdlinie*, wenn nur der Punkt *b* oder *e* in der Wandlinie oder deren Verlängerung immer so gelegt wird, daß das Gleitprisma ein *Dreieck* ist.

Macht man die Strecken $\overline{d_0 c_0}$ und $c_0 m_0$ gleich, so stellt das Dreieck $c_0 d_0 m_0$ das *Druckdreieck* vor, weil ja $\overline{c_0 d_0}$ gleich dem Erddruckmaß cd gemacht worden ist.

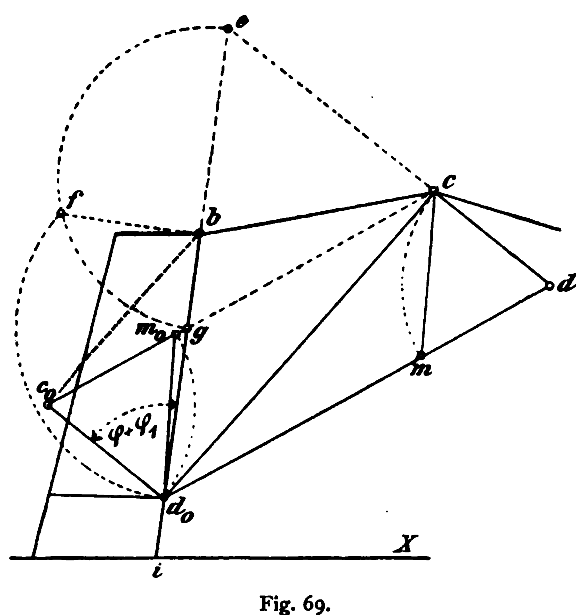


Fig. 69.

21. Überlast einer lotrechten Einzelkraft bei ebener Wand und ebener Erdlinie.

a. Einflüsse einer wandernden Einzellast auf die Erddruckgröße. Man denke sich die Einzellast über eine gewisse Breite der Erdlinie gleichmäßig verteilt. Das wird in praktischen Fällen immer nötig sein. In der Fig. 70 sind drei solcher Erdlasten in beliebigen Stellungen (b—$1'$, $4'$—$5'$, $9'$—$10'$) dargestellt, mit den entsprechenden Breiten α, β, γ. Um die Größe des Erddruckes für jede dieser Erdlasten zu berechnen, kann man das folgende Verfahren einschlagen.

Für eine gleichmäßige Überlast der Höhe h_0 ist (nach **19** b, 1) die gleichwertige Erdlinie festgelegt worden. Deren Höhe y berechnet sich aus der Gl. (38)

$$y + h = \sqrt{h(h + 2h_0)}.$$

In der Fig. 70 wurde angenommen

$$h = 8 \text{ m}; \quad h_0 = 4 \text{ m},$$

und daraus *bei lotrechter Wandlinie*

$$y = 3{,}3137 \text{ m}$$

berechnet. Ferner wurde angenommen

$$\varphi = 30^\circ \text{ und } \varphi + \varphi_1 = 60^\circ.$$

Jetzt wurden für die erste Erdlast der Breite $a = \overline{b - 1'}$ die Ausgangspunkte s_0 und s_1 der betreffenden Stellungslinien festgelegt; s_0 fällt in die Wandrichtung *iv* und s_1 findet man in bekannter Weise (nach **19**, b 1). Mit Hilfe der (nicht gezeichneten) Parallelen *bn* und $O\,1'$ erhält man den Pol O. Zieht man zur $i\,1'$ eine

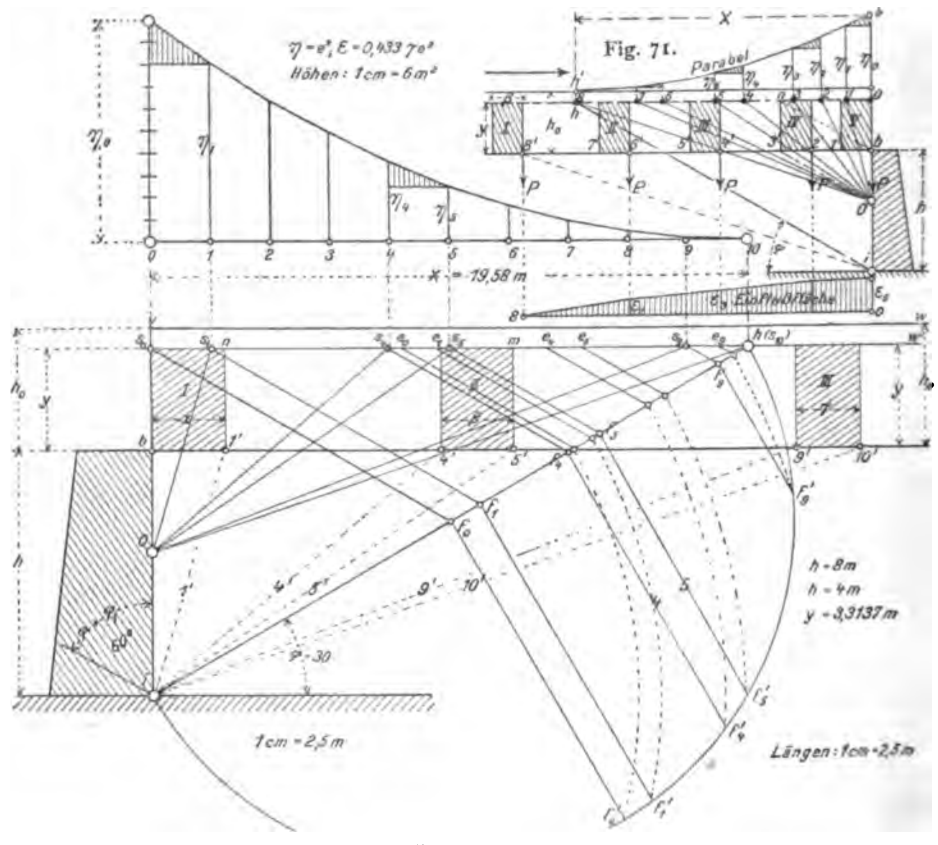


Fig. 70.

Parallele durch den Pol, so wird damit s_1 festgelegt. Auch für alle übrigen Ausgangspunkte der Stellungslinie bleibt O der festliegende Pol. In dieser Weise erhält man für die Erdlast II die Punkte s_4 und s_5 mit Hilfe der zu den Strahlen $i\,4'$ und $i\,5'$ parallel gelegten Polstrahlen Os_4 und Os_5. Ebenso findet man für die Erdlast III die Punkte s_9 und s_{10}. Dabei wurde der Fußpunkt $10'$ der Erdlast so gewählt, daß der zugehörige Punkt s_{10} in den Endpunkt h der Böschungslinie fiel. Das geschah durch die parallelen Strahlen Oh und $i\,10'$.

Die s-Punkte bilden Ausgangspunkte für die Stellungslinien $s_0 f_0$ bis $s_9 f_9$. In den Punkten f_0 bis f_9 der Böschungslinie werden die Senkrechten $f_0 f'_0$ bis $f_9 f'_9$

errichtet und (nach **17**, a) die *Erddruckmaße* e_0, e_1, e_4, e_5, e_9 dargestellt. Bezeichnet man die Strecke dieses Maßes allgemein mit e, so ist die Fläche F des Erddruckdreieckes mit

$$F_e = k \cdot e^2$$

anzuschreiben, wenn k ein Festwert ist. Im vorliegenden Sonderfalle ergeben sich alle Druckdreiecke als *gleichseitige*. Daher erhält man

$$F_e = \sin 60^\circ \cdot \frac{e^2}{2} = 0{,}433\, e^2,$$

$$E = \gamma_e \cdot 1 \cdot F_e = 0{,}433 \cdot \gamma_e e^2. \tag{47}$$

Trägt man jetzt über der $\overline{s_0 h} = x$ die für die s-Punkte erhaltenen Größen e^2 als Ordinaten η auf, so liegen deren Endpunkte in einer *Parabel* (Fig. 70 oben). η_0 gibt e^2 für die *Voll*belastung der Erdlinie b—10′, während die Ordinaten (η_1 bis $\eta_{10} = 0$) je eine Größe e^2 vorstellen, die nacheinander für die *Teil*belastungen der Erdlinie 1′—10′, 4′—10′, 5′—10′, 9′—10′ gelten. *Damit sind auch die allein von den Erdüberlasten* I bis III verursachten Erddrücke gegeben. Man erhält für die Erdüberlast

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & E = 0{,}433\, \gamma_e (\eta_0 - \eta_1), \\ \text{II:}\quad & E = 0{,}433\, \gamma_e (\eta_4 - \eta_5), \\ \text{III:}\quad & E = 0{,}433\, \gamma_e \eta_9. \end{aligned} \tag{48}$$

Man sieht daraus, wie die Größe von *E allmählig abnimmt, je mehr die betreffende Erdüberlast sich von der Mauerwand entfernt*, bis E verschwindet, wenn die der Mauer zugekehrte Lotrechte der Erdüberlast denjenigen Punkt der Erdlinie überschreitet, der von der Parallelen zur Böschungslinie ih getroffen wird.

b. Die Einflußfläche des Erddruckes für eine Erdüberlast. Es ist leicht zu sehen, wie man mit Hilfe der für die s-Punkte gezeichneten Ordinaten η der Parabellinie (Fig. 71) *die Einflußfläche des Erddruckes E einer Einzellast darstellen kann, wenn man die Einzellast P über eine bestimmte Breite verteilt annimmt und für ihre Begrenzungslotrechten die s-Punkte festlegt.* Wie dies geschehen kann, ist in der Fig. 71 dargestellt.

Die schraffierten Rechtecke von der Höhe y stellen fünf Erdüberlasten P dar, die sich jede über eine gleiche Breite β der Erdlinie verteilen. Man denke sich nun die Last I in derjenigen Lage, für welche der mit der Böschungslinie zusammenfallende Strahl ih den Ausgangspunkt 8 der Stellungslinien trifft. Das heißt der Strahl $i\,8$ ist parallel dem Polstrahle $O\,8$. Der Pol wird in bekannter Weise gefunden; in der Fig. 71 ist dies durch die zur $b\,n$ gezogene Parallele $3'O$ geschehen.

Jetzt folgt das Festlegen aller (schwarz hervorgehobener) s-Punkte von O bis 8, durch Legen der Polstrahlen $O\,1$ bis $O\,8$. Die Ordinaten $\eta = e^2$ sind für alle diese Punkte durch η_0 und die Parabellinie $h'b'$ gegeben: Für Punkt 8 ist $\eta_8 = 0$. Aus den Ordinaten-Unterschieden erhält man im vorliegenden Falle:

$$E_I = 0; \quad E_{II} = 0{,}433\, \gamma_e (\eta_6 - \eta_7); \quad E_{III} = 0{,}433\, \gamma_e (\eta_4 - \eta_5);$$
$$E_{IV} = 0{,}433\, \gamma_e (\eta_2 - \eta_3); \quad E_V = 0{,}433\, \gamma_e (\eta_0 - \eta_1).$$

Diese Größen von E sind in den Fußpunkten $8'$ bis b von P aufgetragen worden und geben so die unterhalb der Fig. 71 dargestellte *Einflußfläche* von E. Soll die Erdlinie lauter aufeinanderfolgende Einzelüberlasten P tragen, so kann dies natürlich nur in den Abständen β erfolgen, wenn β die Breite der Erdlinie vorstellt, über welche sich P gleichmäßig verteilt. *Die Gesammtsumme aller Größen E solcher aufeinanderfolgenden P-Lasten muß dann gleich dem Erddruck einer von $8'$ bis b durchlaufenden gleichmäßigen vollen Erdüberlast der Höhe y sein. Das ist in einem gegebenen Falle nachzuprüfen.*

22. Die Gleitflächen für den Angriffspunkt einer Einzellast.

a. Darstellung mit Hilfe einer gleichwertigen Erdlinie.

1. Man findet die Gleitfläche für eine Einzellast in beliebiger Lage (Fig. 72) wie folgt: Man bestimmt zuerst (nach **20**) die Gleitfläche für den Angriffspunkt c der unüberlasteten Erdlinie bh. Zu dem Zwecke wurden die Parallelen cs und ce

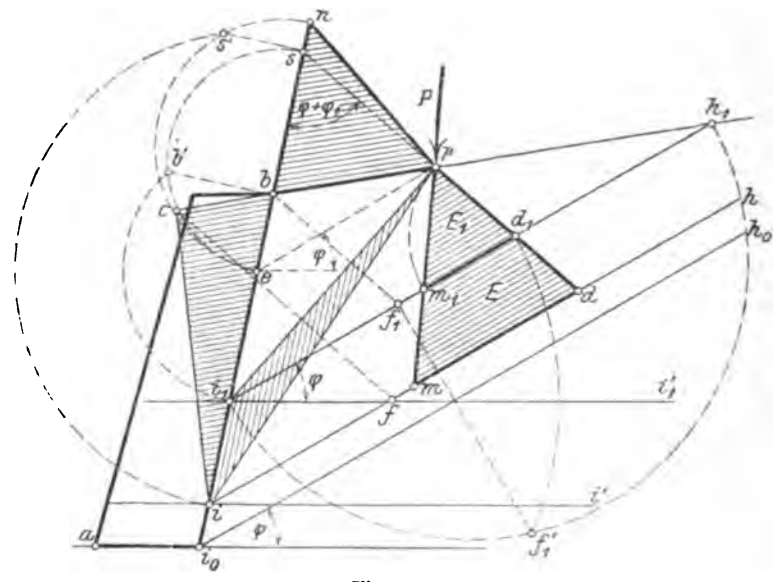


Fig. 72.

zur Stellungslinie und zur Böschungslinie gezeichnet, über es ein Halbkreis geschlagen und bb' senkrecht zur Wandlinie eglegt. Macht man dann die Sehnenstrecke eb' gleich der Wandstrecke ei, so ist ci die gesuchte Gleitfläche, vorläufig abgesehen vom Einfluß der Erdüberlast P.

Durch die Überlast vergrößert sich der Erddruck E. Aus dem Druckdreieck erhält man

$$E = \gamma_e \, \text{Fl.}\, cdm.$$

Der *allein von der Erdüberlast* verursachte Erddruck E_p ist nach Vorigem aus einer Einflußfläche (Fig. 71) zu berechnen. Zeichnet man also ein dem Dreieck cdm ähnliches Dreieck cd_0m_0, so ist dessen Fläche durch die Bedingung

$$E + E_p = \gamma_e \cdot \text{Fl.}\, cd_0m_0$$

gegeben. Die Gleitfläche für $E + E_p$ findet man also durch Verlängern der Seite $d_0 m_0$ bis zur Wandlinie in i_0. Dann ist $c i_0$ die gesuchte Gleitfläche für den Angriffspunkt c des gesamten Erdreiches *ausschließlich der Erdsäule* βy.

2. Wollte man im vorliegenden Falle die Gleitfläche vollständig nach dem einfacheren unter **20** gegebenen *Näherungsverfahren* zeichnen, so würde man die Erdüberlast yh in ein Dreieck bcn verwandeln, den Halbkreis über der en schlagen und die Senkrechte ss' errichten. Durch die Sehne es' wäre dann der Endpunkt i_0 festgelegt. Auch bei diesem Verfahren erkennt man, wie der Erddruck durch die Überlast P um so größer wird, je mehr ihr Angriffspunkt sich dem Wandlinienpunkte b nähert (Fig. 72).

b. Beispiel. Im Punkte p der Erdlinie bh_1 (Fig. 72) greife eine Einzellast P an, d. h. derjenige Teil einer Last, der auf die Mauertiefe „Eins" entfällt. Es soll die Gleitfläche für den Punkt p gezeichnet werden. Zu dem Zwecke verwandle man P in ein Erddreieck bpn, dessen Seite bn in die Richtung der Wandlinie bi_0 fällt. Ziehe durch p die Stellungslinie ps und eine Parallele pe zur Böschungslinie. Dann ist die Lage der Gleitfläche pi durch die Bedingung

$$\overline{ie}^2 = \overline{es} \cdot \overline{en}$$

bestimmt: Halbkreis über der $\overline{en}$; in s die Senkrechte $\overline{ss'}$ und

$$\overline{es'} = \overline{ie}$$

zu machen.

Will man die Gleitfläche für $P = 0$ im Punkte p darstellen, dann fällt n mit b zusammen, der Halbkreis ist über $\overline{es}$ zu schlagen, die Senkrechte bb' zu bestimmen und

$$\overline{ei_1} = \overline{eb'}$$

zu machen. Daraus folgt, daß der Einfluß der Last P auf die Standfestigkeit der Mauer der Wandstrecke $\overline{bi_1}$ gleich Null ist. Der Einfluß von P erstreckt sich nur auf das Stück $\overline{i_1 i}$ der Wandlinie. Auf die Strecke $\overline{ii_0}$ wirkt P nur insoweit, als sein statisches Moment in bezug auf a in Frage kommt.

Will man die in der Fig. 72 danach gefundene Lage der Punkte d_1, d des Erddruckdreiecks pdm nachprüfen, so kann man das Dreieck bnp in ein flächengleiches Dreieck cbi verwandeln. Dann ist

$$\gamma \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle bpn = P = \gamma \cdot 1 \cdot \text{Fl.} cbi$$

und c als Ausgangspunkt einer Stellungslinie zu nehmen, durch welche die Böschungslinie $\overline{ih}$ in f geschnitten wird. Dann Halbkreis über der $\overline{ih}$, in f die Senkrechte $\overline{ff'}$ errichtet und $\overline{if'} = \overline{id}$.

Für die Lage des Punktes d_1 ist die Nachprüfung ausgeführt und

$$\overline{i_1 f'_1} = \overline{i_1 d_1}$$

gefunden worden. Die Erddrücke berechnen sich wie folgt:

bis zur Wagerechten $i_1 i'_1$: $E_1 = \gamma \cdot 1 \cdot \text{Fl.} p d_1 m_1$,
" " " ii': $E = \gamma \cdot 1 \cdot \text{Fl.} pdm$,

so daß auf die Strecke $\overline{i_1 i}$ der Wandlinie der Erddruck entfällt

$$E_0 = E - E_1 = \gamma \cdot 1 \cdot \text{Fl.} mm_1 d_1 d.$$

Will man schließlich noch den Erddruck E_0 bis zur Wagerechten durch i_0 bestimmen, so kann das dadurch geschehen, daß man das Dreieck icb als ein flächengleiches Dreieck $i_0 c_0 b$ aufträgt und sonst wie vorher verfährt. c_0 tritt dann an Stelle von c.

c. Die Einzellast liegt unmittelbar neben der Mauerkrone. Nach **21**, b wäre dieser Sonderfall zu lösen, sobald die Einzellast P über eine gewisse Breite bc der Erdlinie verteilt gedacht würde.

Winkler nimmt die Breite bc als unendlich klein an und kommt dann zu folgendem Ergebnis für die Größe des Erddruckes.

In Fig. 73 wird das Gewicht der Einzellast P durch das schraffierte Dreieck bcp vorgestellt. Für einen beliebigen andern Punkt c_1 der Erdlinie sei

$$1 \cdot \gamma_e \cdot \text{Fl.} \triangle b c_1 p_1 = 1 \cdot \gamma_e \cdot \text{Fl.} \triangle bcp = P.$$

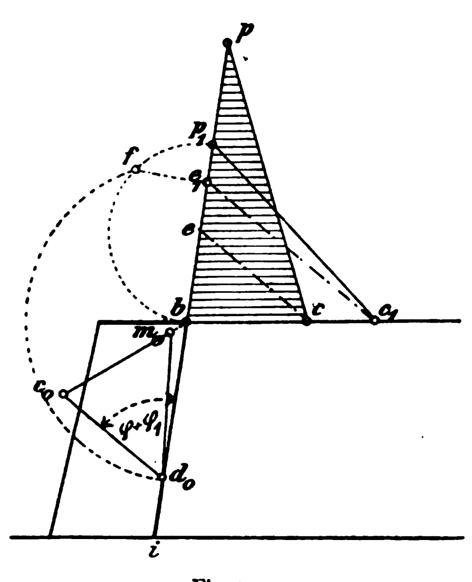


Fig. 73.

Daraus folgt

$$\frac{\overline{bp_1}}{\overline{bp}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bc_1}}.$$

$\overline{ce}$ und $\overline{c_1 e_1}$ seien Parallelen zur Stellungslinie. Dann ist auch

$$\frac{\overline{be}}{\overline{be_1}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bc_1}}.$$

Das gibt

$$\frac{\overline{bp_1}}{\overline{bp}} = \frac{\overline{be}}{\overline{be_1}}$$

oder

$$\overline{bp_1} \cdot \overline{be_1} = \overline{bp} \cdot \overline{be}. \qquad (49)$$

Weil $\overline{bc}$ *unendlich klein* angenommen worden ist, so fällt der frühere Endpunkt e einer durch c zur Böschungslinie gelegten Parallelen (Fig. 69) jetzt mit dem Punkte b der Krone zusammen. Der Halbkreis zur Darstellung der mittleren Proportionalen — nach Gl. (46) — ist also über der $\overline{bp}$ zu schlagen, so daß

$$(\overline{bd_0})^2 = \overline{be} \cdot \overline{bp}$$

wird. Dafür darf aber nach Gl. (49)

$$(\overline{bd_0})^2 = \overline{be_1} \cdot \overline{bp_1} \qquad (50)$$

angeschrieben werden, d. h. *der Endpunkt d_0 der Gleitfläche bd_0 für P kann für einen beliebig gewählten Punkt c_1 der Erdlinie dargestellt werden, wenn*

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle b c_1 p_1 = P$$

gemacht wird.

Zieht man durch b eine Parallele zur Böschungslinie und durch d_0 eine Stellungslinie, die jene Parallele in c_0 trifft, so ist die Strecke $c_0 d_0$ gleich dem Erddruckmaß. Für

$$\overline{c_0 d_0} = \overline{c_0 m_0}$$

erhält man für den *Erddruck* E_0 *aus der Überlast* (nach **18,** b) die Gleichung

$$E_0 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_0 d_0 m_0 .$$

23. **Erddruck auf gebrochene und krumme Wandflächen.** Bildet die Wandlinie im Querschnitt ein *Vieleck* (Fig. 74), so ist in jeder Ecke ein wagerechter Teilstrich durch Wand und Erde zu ziehen und für die dadurch erhaltenen Teilflächen ist der Erddruck je besonders zu bestimmen. Dabei erfolgt die Darstellung des Erddruckes E_1 der obern Teilfläche so, wie im vorhergehenden für verschiedene Belastungsfälle der ebenen Wand beschrieben wurde. Die übrigen Teilerddrücke E_2, E_3, E_4 usw. werden durch ein besonders zu erläuterndes Verfahren ermittelt. Größe und Richtung der Mittelkraft E aller Teilerddrücke finden sich dann aus einem Krafteck (Fig. 74 oben). Bei obiger Teilung durch Wagerechte ist für *krumme* Wandlinien die *Höhe* der einzelnen Teilflächen (1, 2, 3, 4 usw.) *klein* genug zu wählen, damit die zugehörige krumme Strecke der Wandlinie genau genug durch eine Gerade ersetzt werden kann.

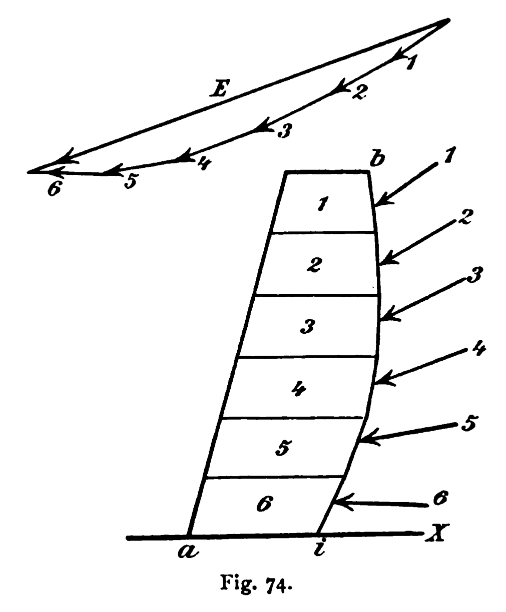


Fig. 74.



a. Gerade Erdlinie ohne Überlast (Fig. 75).

1. Für die obere Teilfläche der Wand ist der Erddruck E_1 in bekannter Weise dargestellt: $i_1 S_1$ ist die dazu benutzte Stellungslinie, $c_1 d_1$ das Erddruckmaß; $c_1 d_1 m_1$ das Druckdreieck. Der Erddruck E_2 auf die untere Teilfläche wird nun *aus dem Kraftecke zu ermitteln sein, das die vorhandenen vier äußern Kräfte, nämlich* E_1, E_2, *der Gegendruck* Q *der Gleitfläche* ic *und das Gewicht* G *des zugehörigen Gleitprismas* $i i_1 b c$ *miteinander bilden müssen.*

Das Krafteck ist in Fig. 76 gezeichnet. Darin ist

$$G = G_1 + G_2 .$$

E_1 kann in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen eine lotrecht ist und die andere *in die Richtung von* E_2 *fällt.* Bezeichnet man die lotrechte Seitenkraft, die einem bestimmten Teile des Gewichtes G gleich ist, mit g und die andere — in Fig. 76 *punktiert* gezeichnete — Seitenkraft mit E_{1-2}, so muß auch zwischen

$$(E_{1-2} + E_2), \quad Q \text{ und } (G - g)$$

Gleichgewicht stattfinden, *denn diese drei Kräfte bilden in der* Fig. 76 *ein geschlossenes Kraftdreieck.* Um E_2 zu finden, bestimme man danach zuerst die Mittelkraft der beiden *gleichgerichteten* Erddrücke E_{1-2} und E_2. Bezeichnet man diese mit E', so ist

$$E' = E_{1-2} + E_2 \text{ oder}$$
$$E_2 = E' - E_{1-2}. \qquad (51)$$

E' findet man *aus einem Gleitprisma, dessen Gewicht um g kleiner ist als das Prisma* ii_1bc *und das im Querschnitte ein Dreieck* isc *bildet, dessen Spitze s in der Erdlinie liegen muß.*

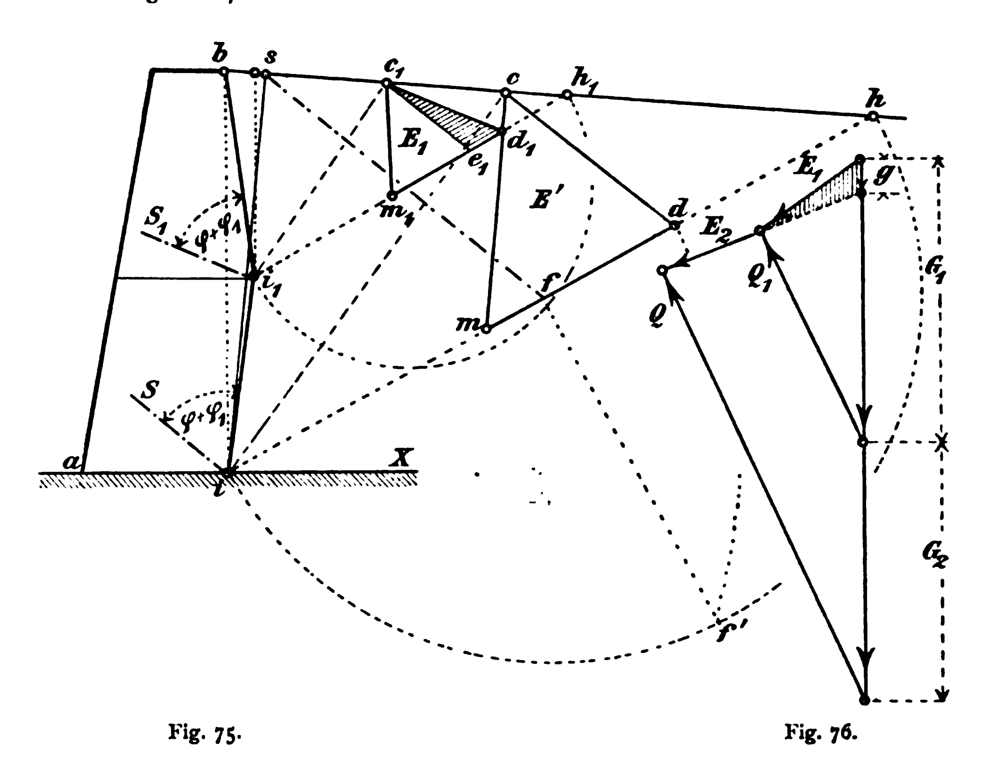


Fig. 75. Fig. 76.

2. Die Bestimmung von E_2 läuft nach obigem im wesentlichen auf eine entsprechende Verwandlung des Prismaquerschnittes ii_1bc hinaus. Das im vorliegenden Falle in Abzug zu bringende Gewicht g kann graphisch dargestellt werden, wenn man, neben dem (zur Stellunglinie der ersten Teilfläche parallelen) Erddruckmaße c_1d_1, durch c_1 noch eine Parallele c_1e_1 zur Stellungslinie iS der untern Teilfläche zieht. Denn dann ist

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_1d_1e_1 = g. \qquad (52)$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung folgt aus der Gleichheit der beiden schraffierten Dreiecke in der Fig. 76. Das Kraftdreieck der Fig. 76 — aus E_1, G_1 und Q_1 gebildet — ist (nach **13**, b) dem Dreieck $i_1c_1d_1$ ähnlich oder es ist kongruent, wenn (wie in der Fig. 76 geschehen ist) die Strecke Q_1 des Kraftecks

gleich der Prismaseite $i_1 c_1$ gemacht wird. Die beiden schraffierten Dreiecke sind kongruent, weil die Richtungen von E_1 und E_{1-2} den gleichen Winkel einschließen, wie die beiden Stellungslinien $i_1 S_1$ und iS. Es verhält sich also

$$\frac{g}{G} = \frac{\overline{e_1 d_1}}{\overline{i_1 d_1}} = \frac{\gamma_e \cdot 1 \cdot \overline{e_1 d_1} \cdot \frac{\lambda}{2}}{\gamma_e \cdot 1 \cdot i_1 d_1 \cdot \frac{\lambda}{2}},$$

wenn λ die Höhe des Dreiecks $c_1 d_1 i_1$ bedeutet. Das gibt

$$g = G\left(\frac{\gamma_e \cdot 1 \cdot \overline{e_1 d_1} \cdot \frac{\lambda_e}{2}}{G}\right)$$

oder

$$g = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\triangle c_1 d_1 e_1,$$

wie es die Gl. (52) aussagt.

3. Um das gesuchte Dreieck isc zu finden, ist demnach von der Fläche $ii_1 bc_1$ das Dreieck $c_1 d_1 e_1$ abzuziehen. Wie dies *graphisch* am einfachsten geschieht, veranschaulicht die Fig. 77. Darin ist das schraffierte Dreieck $c_1 d_1 e_1$, dessen Seiten $c_1 d_1$ und $c_1 e_1$ den betreffenden Stellungslinien $i_1 S_1$ und iS parallel sind, in ein flächengleiches Dreieck $i_1 bk$ verwandelt, das in der Fig. 77 ebenfalls schraffiert ist. Die Verwandlung geschah wie folgt:

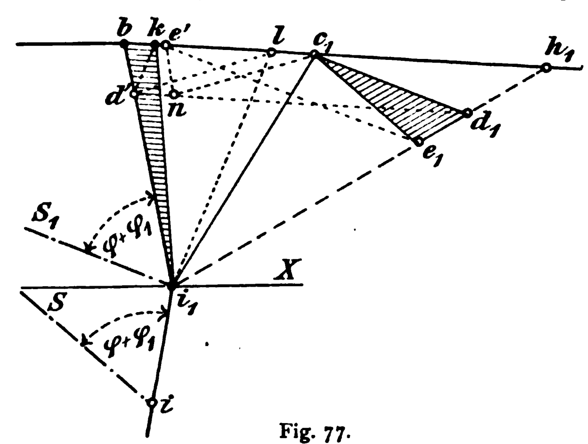


Fig. 77.

$$\overline{c_1 e'} \parallel \overline{d_1 c_1} \quad \text{und} \quad \overline{d_1 d'} \parallel \overline{b h_1}$$
$$\overline{e' n} \parallel \overline{i_1 b}.$$

Zieht man darauf die Gerade nc_1, so ist

$$\text{Fl}\triangle e' c_1 n = \text{Fl.}\triangle c_1 d_1 e_1,$$

weil

$$\text{Fl.}\triangle c_1 d_1 e_1 = \text{Fl.}\triangle e' c_1 d_1 = \text{Fl.}\triangle e' c_1 n.$$

Macht man jetzt

$$\overline{d' l} \parallel \overline{n c_1},$$

so ist auch

$$\text{Fl.}\triangle d' b l = \text{Fl.}\triangle c_1 d_1 e_1.$$

Schließlich folgt

$$\overline{d' k} \parallel \overline{i_1 l},$$

womit

$$\text{Fl.}\triangle d' k l = \text{Fl.}\triangle d' k i_1,$$

also auch

$$\text{Fl.}\triangle i_1 b k = \text{Fl.}\triangle c_1 d_1 e_1 \qquad (53)$$

gemacht wird.

4. Nachdem mit Hilfe der in Fig. 77 angegebenen, oder in anderer Weise, die Prismafläche ii_1bh (Fig. 75) in ein um die Fläche des Dreiecks $c_1d_1e_1$ kleineres Dreieck ish verwandelt worden ist, wird s als Ausgangspunkt einer Parallelen zur untern Stellungslinie iS benutzt, der Halbkreis über der $\overline{ih}$ geschlagen und (in bekannter Weise) die Gleitfläche ic gefunden. Macht man dann $\overline{cd} = \overline{dm}$, so ist *$cdm$ das Druckdreieck für E'*, der Mittelkraft von E_2 und E_{1-2}, wobei E_{1-2} durch die *punktierte* Seite des schraffierten Dreiecks der Fig. 76 dargestellt wird. Damit ist, nach Gl. (51), auch E_2 aus

$$E_2 = E' - E_{1-2}$$

gefunden.

5. In der Fig. 75 ist der *Kantenwinkel* der in der Mauerecke i_1, zusammenstoßenden Wandflächen bi_1 und i_1i *kleiner als* 180°. Daraus ergibt sich der Winkel β, den die Erddruckrichtung mit der Wagerechten einschließt, für E_1 größer als für E_2. Ist aber, wie es in der Fig. 78 veranschaulicht ist, der bezeichnete Kantenwinkel *größer als* 180°, so tritt das Umgekehrte ein: der Winkel β ist für E_2 größer als für E_1. Deshalb wird auch die zur untern Stellungslinie parallel laufende Seite c_1e_1 des schraffierten Dreiecks $c_1d_1e_1$ *oberhalb des Erddruckmaßes c_1d_1 zu liegen kommen* (Fig. 78). Die Fläche des schraffierten Dreiecks $c_1d_1e_1$ ist demnach bei der (unter 4) gezeigten Flächenverwandlung nicht *negativ* sondern *positiv* zu nehmen, so daß der Punkt s in Fig. 78 links von b fällt, während er in Fig. 75 rechts von b zu liegen gekommen ist. Nach obigem erscheint in *baulicher* Hinsicht eine *ein*springende Ecke i_1 der Wandfläche vorteilhafter als eine *aus*springende, wie sie Fig. 78 zeigt. Denn unter sonst gleichen Verhältnissen erhält man für eine Stützmauer größere Erddrücke bei auspringenden als bei einspringenden Ecken (Fig. 75). Hierüber ist auch **23**, b zu vergleichen.

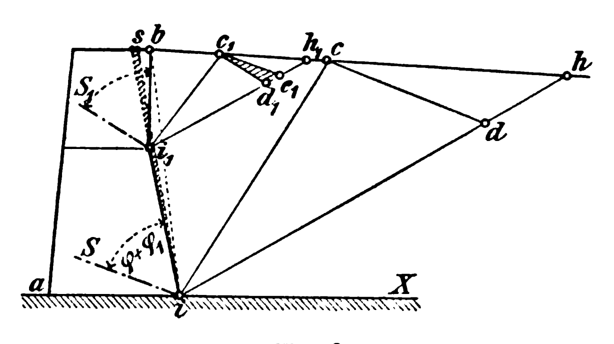


Fig. 78.

b. Überlast einer lotrechten Einzelkraft.

1. Wenn der Angriffspunkt c der Einzellast P (Fig. 79) nahe der Krone bei b liegt und deshalb der Fußpunkt der für c gezeichneten Gleitfläche noch in der *obern* Wandlinie bi_1 zu liegen kommt, so liegt ein Fall vor, wie er unter **20** behandelt worden ist. Wir nehmen aber an, c läge so weit von b, daß die Fußpunkte der beiden für c zu zeichnenden Gleitflächen in die untere Wandlinie i_1i fallen.

Ohne Berücksichtigung von P erhält man die Gleitfläche cd_1 wie folgt: Man bestimme zuerst (nach dem unter a. angegebenen Verfahren) das Gewicht g (Gl. 52), um welches das Erdprisma ii_1bc zu verringern ist, wenn man den Erddruck E_2 für die untere Wandfläche i_1i (Fig. 79) darstellen will. Dies Gewicht ist für jeden

beliebigen in der untern Wandlinie liegenden Fußpunkt *unveränderlich* und es kann (nach a. 3) durch ein Dreieck i_1bk veranschaulicht werden, so daß

$$g = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,\triangle i b_1 k$$

ist.

Verwandelt man nun das Dreieck i_1kc in ein flächengleiches Dreieck i_1e_1c, dessen Spitze e_1 in die Verlängerung der untern Wandlinie fällt, — was durch $ke_1 \parallel i_1c$ erfolgt — so kann die frühere (unter **20** in Fig. 68) gegebene Darstellung der Gleitfläche, unter Anwendung der Gl. (46) angewendet werden: Durch c die Parallelen ce und cg zur Stellungs- und Böschungslinie; über der $\overline{ge}$ ein Halbkreis; Senkrechte e_1f_1 zur Wandlinienrichtung ie; Sehne f_1g gleich der Strecke gd_1 der Wandlinie. Dann ist cd_1 die gesuchte Gleitfläche *ohne* Überlast. Der Erddruck E' dazu findet sich aus dem zugehörigen Druckdreieck (nach Fig. 75 oder Fig. 69).

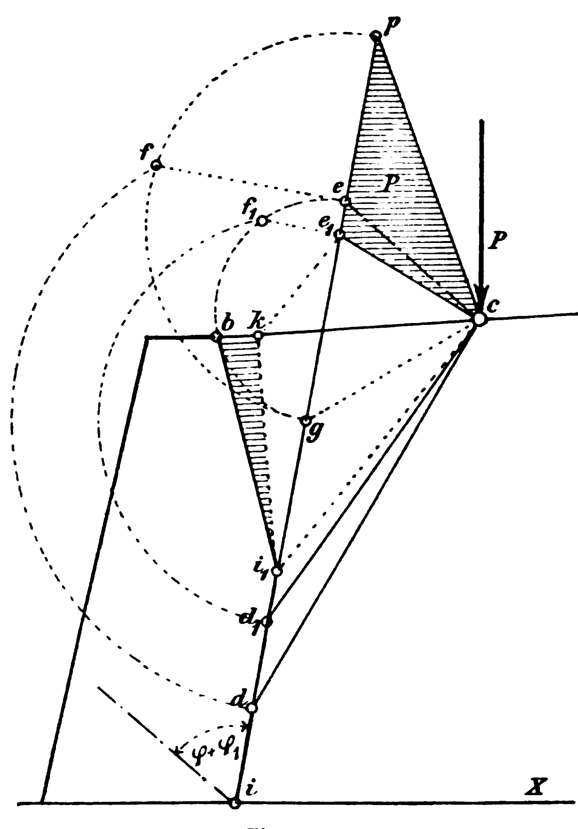


Fig. 79.

Trägt man das schraffierte Dreieck ce_1p auf der $\overline{ce_1}$ so an, daß die $\overline{e_1p}$ in der Wandlinienrichtung ie zu liegen kommt, so läßt sich auch die Gleitfläche *mit* der Überlast zeichnen: Halbkreis über der $\overline{gp}$; Senkrechte ef zur $\overline{ip}$; Sehne fg gleich der Strecke gd zu machen. Somit erhält man in der $\overline{cd}$ die zweite Gleitfläche, die den Einfluß der Einzellast veranschaulicht (vgl. Fig. 72, unter **22**, a).

2. Die Darstellung der beiden Gleitflächen ist auch für *gebrochene oder krumme Erdlinien* leicht auszuführen, wenn man das zugehörige Prisma i_1bc zuvor in ein flächengleiches Dreieck i_1sc verwandelt, dessen Spitze s in der Richtung der *obern* Wandlinie liegt. Man zeichnet dann an Stelle des schraffierten Dreiecks i_1bk der Fig. 79 ein Dreieck i_1sh, so daß

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,i_1sh = g$$

wird. Schließlich folgt $ke_1 \parallel i_1c$ usw. wie unter 1.

24. Der Angriffspunkt des Erddruckes. Bisher beschränkten sich unsere Darstellungen nur auf die Ermittelung der *Lage der Gleitfläche* und der *Größe des Erddruckes* für die vorkommenden wichtigsten Fälle der ebenen, gebrochenen und krummen Wand, bei gerader oder beliebig gestalteter Erdlinie *mit und ohne Überlasten.* Um aber, wie die **Fig.** 53 (unter **15**, a) erklärt, Lage und Größe der die Mauersohle *ai* treffenden Mittelkraft R (aus dem Erddrucke E und dem Mauergewichte P) feststellen zu können, ist es notwendig, für die oben genannten Fälle auch noch die *Angriffspunkte* der Teilerddrücke (Fig. 74) oder den Angriffspunkt ihrer Mittelkraft E in der Wand aufzusuchen.

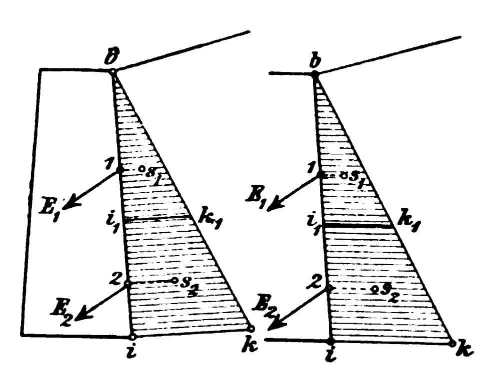


Fig. 80. Fig. 81.

a. Ebene Wand und gerade Erdlinie.

1. Das einfachste Verfahren besteht hier darin, daß man *das Druckdreieck für E in ein flächengleiches Dreieck ibk verwandelt*, dessen Grundlinie *ik* entweder parallel der Erddruckrichtung oder in beliebiger Richtung (Fig. 80) oder wagerecht (Fig. 81) aufgetragen wird, wobei der Maßstab für die Flächeneinheit beliebig gewählt werden kann. Also

$$E = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle ibk. \qquad (54)$$

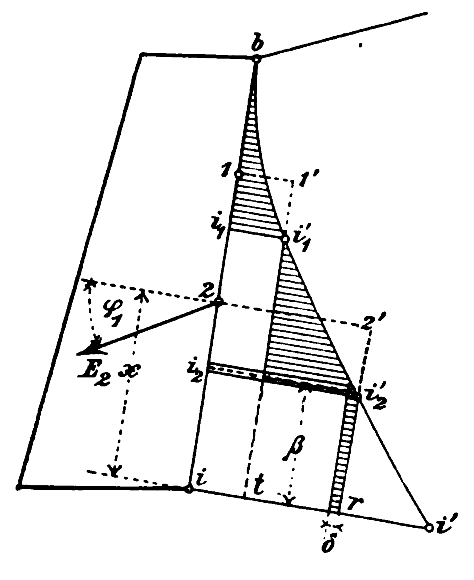


Fig. 82.

Weil alle Druckdreiecke einander ähnlich sind, veranschaulicht z. B. die materielle Linie $i_1 k_1$ den unendlich kleinen Teilerddruck ΔE im Punkte i_1. Jede der Grundlinie des Dreiecks *ibk* parallele materielle Linie kann deshalb als Maß des auf der betreffenden Wandstelle wirkenden Teilerddruckes ΔE angesehen werden. Der Angriffspunkt 1 eines Teilerddruckes E_1 auf die Wandstrecke bi_1 liegt demnach in einer durch den Schwerpunkt s_1 des Dreiecks bi_1k_1 führenden Parallelen zur Grundlinie *ik*. Ebenso liegt der Angriffspunkt 2 des Erddruckes E_2 auf die Wandstrecke i_1i in einer durch den Schwerpunkt s_2 des Trapezes i_1k_1ki zur $\overline{ik}$ gezogenen Parallelen. Aus alledem folgt der Satz:

Der auf eine ebene Wand wirkende Erddruck nimmt seine Richtung durch den obern Punkt des untern Drittels der Wandlinie.

2. An Stelle der *Teil*erddrücke ΔE kann man auch in jedem Wandpunkte i_1 diejenige Ordinate $i_1 i'_1$ (Fig. 82) auftragen, welche dem Erddrucke auf die ebene Wandstrecke $b i_1$ entspricht. Man erhält dann für eine Wandlinie bi an Stelle des Dreiecks bik der Fig. 80 — 81 eine *Parabel* $b i'_1 i'$, deren Scheitel in b liegt; denn die Erddrücke verhalten sich ihrer Größe nach wie die *Quadrate* einer Seite der zugehörigen ähnlichen Druckdreiecke, oder was dasselbe ist, *wie die Quadrate der zugehörigen Wandhöhen.*

3. Der Angriffspunkt 2 des Erddruckes E_2 auf die beliebige Wandfläche $i_1 i_2$ läßt sich wie folgt bestimmen: Die Ordinaten $i_1 i'_1$ und $i_2 i'_2$ entsprechen der Größe der auf die zugehörigen Wandlinien $b i_1$ und $b i_2$ fallenden Gesamterddrücke (Fig. 82). Unmittelbar über der Ordinate $i_2 i'_2$ denke man sich in unendlich kleinem Abstande eine Nachbarordinate gezogen. Der Unterschied ihrer beiden Längen sei δ. Dann ist

$$\Delta E_2 = \delta .$$

Bezeichnet man den Abstand zwischen dem Angriffspunkte von ΔE_2 und i mit β, so ist das statische Moment von ΔE_2 in Bezug auf den untern Randpunkt i mit

$$\Delta E_2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \beta = \delta \cdot \beta \cdot \cos\varphi_1$$

anzuschreiben, weil die *in* die Wandrichtung fallende Seitenkraft von ΔE_2 kein Moment erzeugt. Das statische Moment M aller Teilerddrücke auf die Wandstrecke $i_1 i_2$ beträgt demnach

$$M = \sum \delta \cdot \beta \cdot \cos\varphi_1 .$$

Die Summierung aller Teilflächen $\delta \cdot \beta$ gibt graphisch die Fläche $(t i'_1 i'_2 r)$. Das Moment M der Teilerddrücke ist gleich dem Momente von E_2. Das gibt (mit Bezug auf die Fig. 82)

$$M = E_2 x \cdot \cos\varphi_1 = \cos\varphi_1 \cdot \text{Fl.}\,(t i'_1 i'_2 r) .$$

Ferner ist graphisch

$$E_2 = i_2 i'_2 - i_1 i'_1 .$$

Daraus folgt

$$x = \frac{\text{Fl.}\,(t i'_1 i'_2 r)}{\overline{i_2 i'_2} - \overline{i_1 i'_1}} ,$$

d. h. *um den in der Höhe x über i liegenden Angriffspunkt 2 des Erddruckes E_2 zu erhalten, verwandele man die Fläche $(t i'_1 i'_2 r)$ in ein Rechteck der Höhe x und der Breite $\overline{tr}$.* Das geschieht durch Verwandelung der *schraffierten* Fläche, die von der krummen Linie $i'_1 i'_2$ und der Ordinatenstrecke

$$\overline{i_2 i'_2} - \overline{i_1 i'_1} = \overline{tr}$$

begrenzt wird. Anwendungen dieses Verfahrens auf die Bestimmung der Angriffspunkte *in gebrochenen Wandflächen* vgl. unter **26**, a.

Weil nun der Inhalt einer Parabelfläche $b i_1 i'_1$, wenn die Parabel die Wandlinie in b berührt, gleich ein Drittel des Rechteckes aus Grundlinie $i_1 i'_1$ und Höhe $b i_1$ ist, so ist damit der (unter a, 1) ausgesprochene Satz von der Lage des Angriffspunktes noch einmal bewiesen.

b. Ebene Wand, und gerade Erdlinie mit gleichmäßig verteilter Überlast.

1. Eine *Vollbelastung* von der Höhe h_0 verwandele man (nach **19**, b und c) in eine gleichwertige Erdlast von der Höhe y (Fig. 83). Zeichne an irgendeiner Stelle ein Dreieck $oi'k$, dessen Inhalt dem Druckdreieck mit Überlast gleich ist. Also

$$\gamma_e \cdot \text{Fl.}\,\triangle oi'k = E_0.$$

Die Spitze o dieses Dreiecks muß in einer durch u führenden Wagerechten zu liegen kommen, wobei u in den Schnitt der Ersatzlinie und der Wandlinienrichtung fällt (vgl. Fig. 64).

In der Höhe $\overline{ob'} = \frac{1}{3}y$ über der Krone b wirkt ein Erddruck E_b, der mit

$$E_b = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,\triangle ob'c$$

angeschrieben werden kann. $\overline{b'c}$ liegt in der durch b geführten Wagerechten. Der Erddruck E_1 auf die Wandfläche bi greift (nach a) im Punkte 1 an, der in die durch den Schwerpunkt s_1 des Trapezes $b'cki'$ verlaufenden Wagerechte fällt. Dabei ist

$$E_1 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,b'cki'.$$

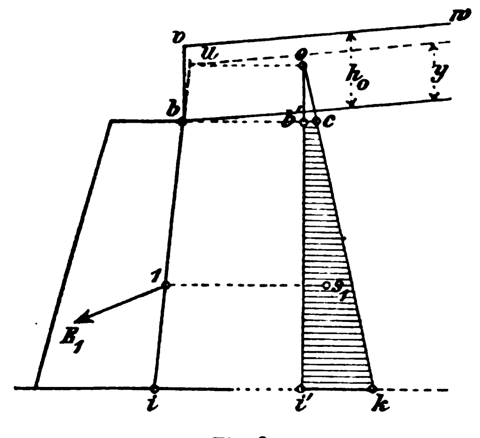


Fig. 83.

Die Richtung von E_0 verläuft durch den obern Punkt des untern Drittels der Wandstrecke ui. Damit sind Lage und Größe der Erddrücke E_b, E_1 und ihre Mittelkraft E_0 derart festgelegt, daß die *Mittelkraftlinie* (I. **16**) gezeichnet werden kann.

Wollte man in vorliegendem Falle das zweite Verfahren, bei welchem in jedem Teilpunkte der Wandlinie der gesamte darüberliegende Erddruck als Ordinate aufgetragen wird, anwenden (Fig. 82), so würde man an Stelle des Dreiecks $oi'k$ eine *Parabel*fläche erhalten.

2. Eine *Teilbelastung* verwandele man wie vor in eine gleichwertige Erdlast von der Höhe y (Fig. 64). Darauf bestimme man die Gleitfläche vi_1 für den Anfangspunkt v der Teillast (nach **19**, b), sowie das zugehörige Druckdreieck für E_1. Sodann verwandele man die Fläche ii_1vuh in ein Dreieck is_2h. Dessen in der Wagerechten uh liegende Spitze s_2 diene zur Darstellung der zweiten, durch i verlaufenden Gleitfläche und des Erddruckes E_2. Eine Nachprüfung muß ergeben

$$E_0 = E_1 + E_2.$$

Die Angriffspunkte für E_1 und E_2 sind dann, wie vor (unter 1) beschrieben zu finden.

c. Gebrochene Wand und gerade Erdlinie. Für die obere Wandstrecke bi_1 wird der Erddruck E_1 und sein Angriffspunkt 1 so gefunden, wie (unter a) angegeben (Fig. 84). Also

$$E_1 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,b'i'_1k_1.$$

Jetzt berechnet man (nach **23**, a, Fig. 75—76) den Erddruck E', der mit dem Gegendruck Q und dem Erdgewichte $G-g$ ein Kraftdreieck bildet (Fig. 76). Das geschieht unter Verwandeln der Prismafläche ii_1bc vom Gewichte G (Fig. 75) in ein Dreieck isc, das um g weniger wiegt. In Fig. 84 ist diese Verwandelung wie folgt ausgeführt: $i_1r \parallel ib$. Dann ist Fl. ii_1bc = Fl. $\triangle irc$. Der Punkt s findet sich also, wenn

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,\triangle\, irc - g = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, isc$$

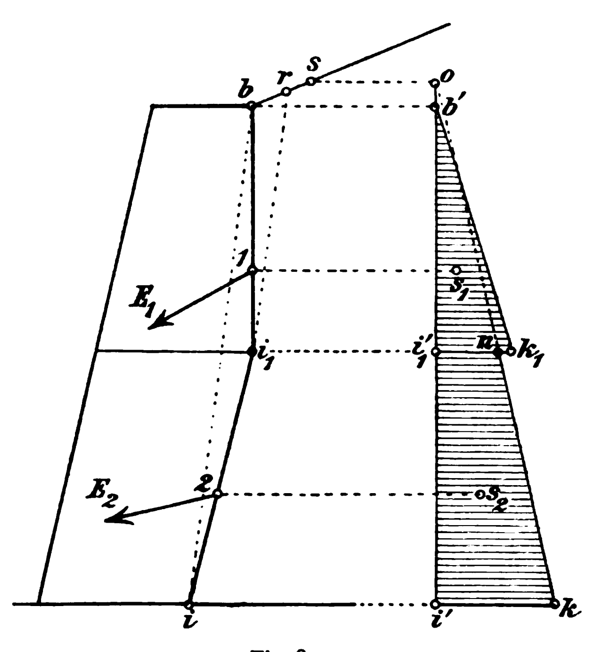


Fig. 84.

gemacht wird. In der durch s führenden Wagerechten liegt die Spitze o eines Dreiecks $oi'k$, dessen Inhalt aus

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,\triangle\, oi'k = E'$$

zu bestimmen sein wird. Der über der i_1k_1 liegende Teil dieses Dreiecks veranschaulicht die Größe *der in die Richtung von E' fallenden Seitenkraft von E_1*. Diese wurde (unter **23**, a) E_{1-2} genannt. Demnach ist

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\,\triangle\, oi_1'k_1 = E_{1-2}.$$

Nach Gl. (51) ist aber

$$E_2 = E' - E_{1-2},$$

d. h. *graphisch*

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, i_1'nki' = E_2.$$

Der Angriffspunkt 2 von E_2 liegt also in der durch den Schwerpunkt des Trapezes $i_1'nki'$ führenden Wagerechten. Die Richtung von E_1 verläuft durch den obern Punkt des untern Drittels der Wandstrecke bi_1.

Man vergleiche die Beispiele unter **26**.

25. Schlußbetrachtungen.

a. Fugenspannungen und Bodendruck. Nachdem im vorigen die Lage der Gleitfläche, Größe der Erddrücke, sowie auch deren Angriffspunkte für die wichtigsten Baufälle ermittelt worden sind, bedarf es, um die Standsicherheit der Stützmauer beurteilen zu können, nur noch der Darstellung einer *Mittelkraftlinie* (I. **58**). Diese wird bekanntlich mit Hilfe eines aus den äußern Kräften — Erddrücken und Mauergewichten — gebildeten Kraftecks zwischen den Kraftrichtungen gezeichnet und sobald das geschehen ist, liefert ihr Schnitt mit einer beliebigen Fuge den sog. *Stützpunkt* (I. **64**, b), von dessen Lage sowohl die Randspannungen, als auch die Spannungsverteilung in der Fuge abhängig sind. Wie bereits (unter **15**, a) dargelegt wurde, ist namentlich die Lage des Stützpunktes der Sohlenfuge (Fig. 53) für die Beurteilung der Sicherheit der Mauer entscheidend, weil der zulässige Bodendruck in der Regel innerhalb viel engerer Grenzen liegt als die zulässigen Fugenspannungen.

Die Beantwortung der Frage, wie der Stützpunkt in der Sohle liegen muß, hängt wesentlich von der *physikalischen Natur des Bodens* ab. Auch muß dabei berücksichtigt werden, ob die Lage des Stützpunktes etwa *veränderlich* ist. Das wird der Fall sein, wenn das Erdreich veränderliche Lasten zu tragen hat, wenn, wie bei Ufermauern, die Sohle wechselnd starken *Auftrieben* ausgesetzt ist (**15**, b, 3—4), oder wenn sich in der Hinterfüllung durch den Auftrieb oder aus andern Ursachen Wasser ansammeln kann. Selbst der Witterungswechsel und starke Änderungen in der Wärme der umgebenden Luft machen die Mittelkraftlinie schwanken, dürfen also in besonderen Fällen nicht außer acht gelassen werden.

Steht die Mauersohle auf sog. *gutem Baugrunde*, wie Sand, Kies und trockenem Lehm oder Ton, so können obige Lagenänderungen des Stützpunktes keine Bedenken hinsichtlich der Sicherheit der Mauer erregen, wenn dabei die größten überhaupt vorkommenden Bodendrücke nur innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben. Auch liegt kein solches Bedenken vor, wenn etwa der Stützpunkt s ein wenig *außerhalb des Kernpunktes* i' fällt (Fig. 97), so daß der Bodendruck auf der Strecke ni der Sohlenfuge verschwindet, falls die elastisch allein widerstehende Druckzone (I. § 18) nicht unzulässig beansprucht wird.

In allen derartigen Fällen kann aber sehr wohl eine Gefahr für die Mauer eintreten, wenn der Baugrund *stark zusammenpreßbar* ist, wie feuchter Lehm oder Ton oder dgl., weil ein derartiger Boden unter einer ungleichmäßigen und wechselnden Verteilung des Druckes *nicht eben* genug bleibt, vielmehr bei jeder Lagenänderung des Stützpunktes nach oben hin eine stärkere Rundung annehmen wird. Dadurch verkleinert sich mehr und mehr die allein widerstehende Druckzone und in entsprechendem Maße wächst dadurch die Gefahr des Kantens der Mauer nach außen. In solchen Fällen muß man den Querschnitt der Mauer so gestalten und die Breite ihrer Sohle so bemessen, *daß das Büschel der verschiedenen, unter den erwähnten Belastungsschwankungen entstehenden Mittelkraftlinien symmetrisch zur Sohle der Mauer zu liegen kommt.* Denn wenn der Stützpunkt um das Mittel der Sohle schwingt, sind einer eintretenden ungleichmäßigen Druckverteilung die engsten Grenzen gesteckt. Deshalb wird auch der Boden unter der Sohle möglichst *eben* bleiben.

Einzelheiten der Darstellung von Mittelkraftlinien und Berechnungen von Bodendrücken sind in den Zahlenbeispielen (unter **26**) zu vergleichen.

b. Vergleichende Betrachtung verschiedener Mauerquerschnitte. Zwei Querschnitte können verschiedene Gestalten zeigen, obwohl sie unter sonst gleichen Umständen, d. h. für gleiche Belastungsverhältnisse und gleiche Sicherheit, angeordnet worden sind. Wenn beide Querschnitte danach *statisch* auch gleichwertig erscheinen, so kann doch *baulich* der eine vor dem andern gewisse Vorzüge besitzen. Um dies näher darlegen zu können, sind in der Fig. 85 acht der gebräuchlichen Querschnittsformen von Stützmauern nebeneinander gestellt worden.

Zuerst wird die Frage zu beantworten sein, welche Form unter sonst gleichen Umständen *das kleinste Mauergewicht* erfordert, oder was etwa dasselbe sagt, welche Form die geringsten Herstellungskosten verursacht. Die Antwort würde lauten müssen: »*Diejenige Form, bei welcher für die maßgebende Belastung die Mittelkraftlinie durch die Mitte aller Fugen verläuft.* Das wäre die unter Nr. 8 gezeichnete Form, deren Wandlinien beide krumm sind, denn deren sämtliche Fugen würden, falls die Wandkrümmungen richtig angelegt wären, nur durch

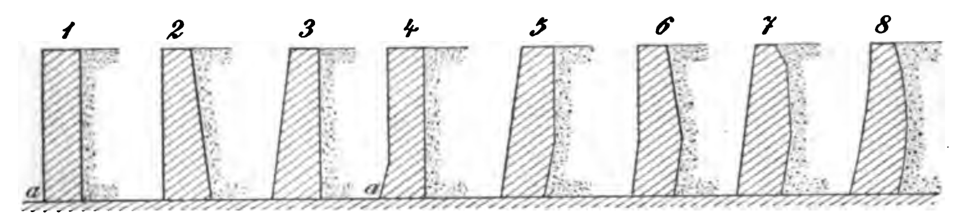


Fig. 85.

Achsenkräfte beansprucht. Deshalb müßten alle Fugenbreiten kleiner ausfallen, als bei den übrigen Formen der Fig. 85. Das geringste Mauergewicht würde Nr. 8 also erfordern, wenn auch im allgemeinen nicht die kleinsten Kosten, weil die Herstellung der krummen Wände mehr Arbeitslohn bedingt, als bei geraden oder gebrochenen Wänden. Diese werden jenen deshalb meist vorgezogen.

Die Nr. 1—3 zeigen je zwei ebene Wandflächen. Die statisch ungünstigere Form besitzt Nr. 1, weil sie, bei gleichem Flächeninhalte und gleicher mittlerer Stärke bei *a* einen größern Bodendruck verursacht, als die beiden andern Formen. Dabei erscheint statisch Nr. 3 im allgemeinen günstiger als Nr. 2, worüber die Tabellen des Anhanges unter **35** zu vergleichen sind[84].

Eine wesentliche Verbesserung erhält die Form Nr. 1, wenn die Sohle bei *a*, wie Nr. 4 zeigt, durch einen Vorsprung der Vorderwand verbreitert und infolgedessen der Bodendruck in *a* wesentlich verkleinert wird. Der Vorsprung ist aber in manchen örtlichen Fällen nicht zulässig. Die Formen 5—7 sind Annäherungen an die günstigste Gestalt der Nr. 8. Sehr verbreitet ist ihrer Einfachheit und Zweckmäßigkeit wegen die Form Nr. 5.

---

[84] Die Tabellen sind entnommen aus HÄSELER. Stütz- und Futtermauern. Handbuch d. Ing.-Wissenschaften. II. Band. III. Kap. 3. Aufl.

c. Verankerung von Stützmauern. Durch Einlegen von eisernern Ankern, deren vorderes Ende fest in der Mauer sitzt, während das hintere Ende weit genug in die anstoßende Erdhinterfüllung reicht, kann man sowohl die Größe des Erddruckes, als auch die Standfestigkeit der Mauer gegen Kippen vermindern. Wie dies im einzelnen zu erreichen ist, hat MÖLLER[85] ausführlich mitgeteilt.

d. Analytische Ausdrücke für die Größe des Erddruckes in einfachen Baufällen. Der einfachste Fall wäre ebene lotrechte Wand und wagerechte gerade Wandlinie (Nr. 1, 3, 4 in Fig. 85). Schon PRONY (1802) hat hierfür bei Annahme eines *wagerechten* Erddruckes

$$E = \frac{\gamma_e h^2}{2} \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{55}$$

nachgewiesen (**11**, a). Die Gleichung folgt ohne weiteres aus der Größe des Erddruckmaßes cd. Ist E wagerecht, so ist der Winkel β (Fig. 54) gleich Null und

$$E = \gamma_e \cdot \frac{\overline{cd}^2}{2}.$$

Weil aber Fl. ibc = Fl. icd sein muß (Gl. 28), so folgt weiter

$$\overline{cd} = \overline{bc},$$

d. h. der Winkel zwischen der natürlichen Böschungslinie ih und Wand bi wird durch die Gleitfläche ic halbiert. Der Winkel beträgt also $\frac{90^\circ - \varphi}{2}$ oder, weil $\overline{bc} = h \operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right)$:

$$E = \frac{\gamma_e h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Nimmt man die Richtung des Erddruckes E um den Winkel φ_1 gegen die Wandsenkrechte, d. h. gegen die Wagerechte, geneigt an, so wird $\beta = \varphi_1$ und (aus dem Druckdreiecke berechnet)

$$E = \frac{\gamma_e \cdot \overline{cd}^2}{2 \cdot \cos\varphi_1}.$$

Unter Benutzung der Gl. (28), sowie auch der Gl. (37) ist es dann leicht, die Größe von E als Funktion der gegebenen Größen: Wandhöhe h, Erdgewicht γ_e, Reibungswinkel φ und φ_1 auszudrücken. Man erhält

$$E = \frac{\gamma_e h^2}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_1} + \sqrt{\sin\varphi \cdot \sin(\varphi + \varphi_1)}}\right)^2. \tag{56}$$

Dieser Ausdruck ist schon nicht mehr einfach. Noch viel verwickelter wird er aber, wenn man ihn unter Annahme *nicht* lotrechter Wand und *nicht* wagerechter Erdlinie ableiten will. Verfasser verzichtet deshalb auf die Wiedergabe weiterer Ausdrücke, indem er diejenigen Leser, die an Stelle der bequemeren graphischen Behandlung einmal die rechnerische versuchen wollen, auf die im Anhange (unter **35**) gegebenen Tabellen (nach HÄSELER) verweist.

---

[85] MÖLLER. Erddrucktabellen usw. 1902. S. 129—148.

26. Zahlenbeispiele.

a. Gebrochene Wand ohne Überlast.

1. *Aufgabe. Für den in der* Fig. 86 *verzeichneten Mauerquerschnitt sollen die Teilerddrücke und deren Mittelkraft E dargestellt werden.*

Die Gleitflächen und Druckdreiecke sind nach dem (unter **23**, a) angegebenen Verfahren ermittelt worden. Zuerst wurden die Gleitfläche $i_1 c_1$ und das zugehörige

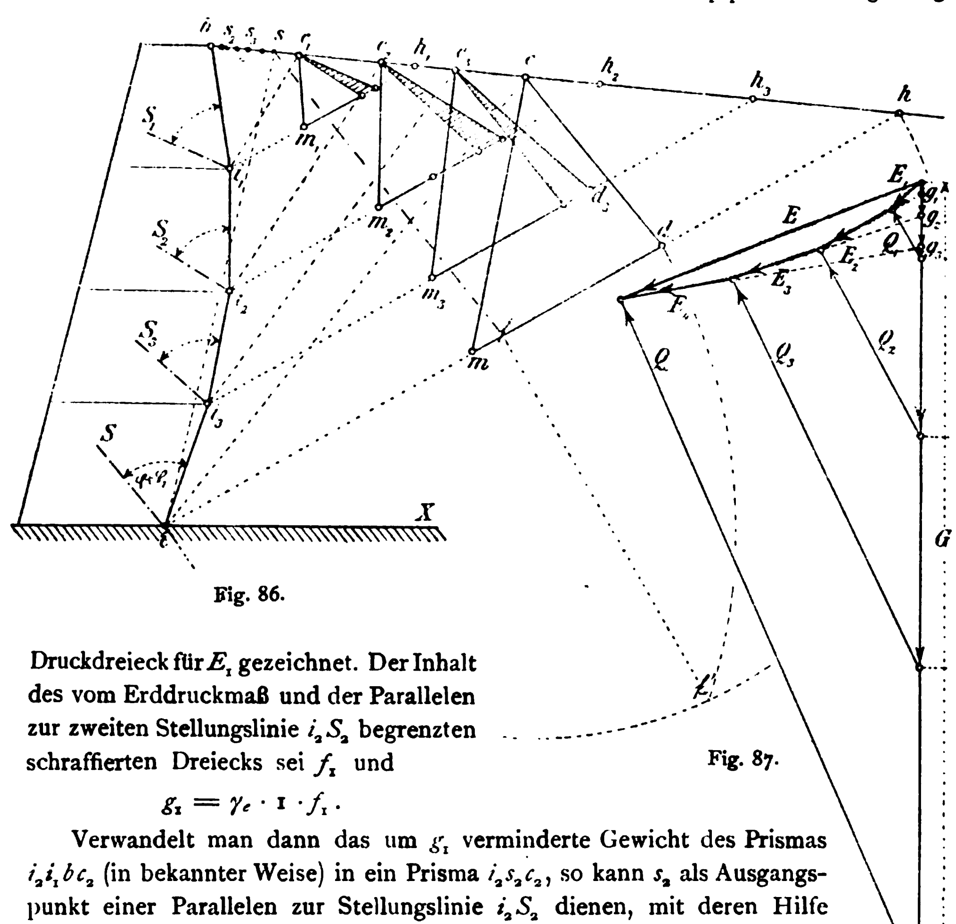


Fig. 86.

Fig. 87.

Druckdreieck für E_1 gezeichnet. Der Inhalt des vom Erddruckmaß und der Parallelen zur zweiten Stellungslinie $i_2 S_2$ begrenzten schraffierten Dreiecks sei f_1 und

$$g_1 = \gamma_e \cdot 1 \cdot f_1 .$$

Verwandelt man dann das um g_1 verminderte Gewicht des Prismas $i_2 i_1 b c_2$ (in bekannter Weise) in ein Prisma $i_2 s_2 c_2$, so kann s_2 als Ausgangspunkt einer Parallelen zur Stellungslinie $i_2 S_2$ dienen, mit deren Hilfe (nach **17**, a) die Gleitfläche $i_2 c_2$ und das zugehörige Druckdreieck für E'_2 gefunden werden kann. Es ist (nach Gl. (51)

$$E_2 = E'_2 - E_{1-2} ,$$

wenn E_{1-2} die in die Richtung von E_2 fallende Seitenkraft von E_1 ist, so daß E_1, E_{1-2} und g_1 (Fig. 87) ein Kraftdreieck bilden.

Im Druckdreieck für E'_2 begrenzt eine Parallele zur dritten Stellungslinie $i_3 S_3$ ein schraffiertes Dreieck, dessen Inhalt f_2 sei. Das Gewicht

$$g_2 = \gamma_e \cdot 1 \cdot f_2$$

bildet dann ein Kraftdreieck mit E'_2 und der in die Richtung von E_3 fallenden Seitenkraft von E'_2. Ebenso müssen die vier äußern Kräfte: E_1, E_2, das um g_2

verminderte Gewicht G_2 des Prismas $i_3 i_2 i_1 b c_3$ und der zugehörige Gegendruck Q_2 der Gleitfläche $i_3 c_3$ ein Kraftviereck bilden (Fig. 87). Dabei ist (in Fig. 86)

$$G_2 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, i_3 i_2 i_1 b c_3 - g_2 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, \triangle i_3 s_3 c_3 .$$

So erhält man

$$E_3' = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, \triangle c_3 d_3 m_3$$

und schließlich

$$E_4' = \gamma_e \cdot 1 \text{ Fl.}\, \triangle c d m .$$

Durch Abgreifen in der Fig. 86 sind die Flächeninhalte der vier Druckdreiecke berechnet worden. Das ergab für $\gamma_e = 1{,}6$ t/m³

$$E_1 = 1{,}6 \cdot 0{,}46 = 0{,}74 \text{ t}$$
$$E_2' = 1{,}6 \cdot 1{,}53 = 2{,}44 \text{ t}$$
$$E_3' = 1{,}6 \cdot 2{,}5 = 4{,}00 \text{ t}$$
$$E_4' = 1{,}6 \cdot 4{,}07 = 6{,}51 \text{ t} .$$

Diese Größen wurden in Fig. 87, zusammen mit den Gewichten g_1, g_2, g_3 aufgetragen und danach konnten die gesuchten Erddrücke abgemessen werden:

$$E_1 = 0{,}74 \text{ t}; \qquad E_2 = 1{,}74 \text{ t}$$
$$E_3 = 1{,}98 \text{ t}; \qquad E_4 = 2{,}4 \text{ t} .$$

Die Mittelkraft E ergab sich mit 6,88 t.

2. *Aufgabe. Für den in der* Fig. 88 *dargestellten Mauerquerschnitt, dessen Hinterwand die gleiche gebrochene Linie zeigt, wie diejenige in* Fig. 86 *der vorigen Aufgabe, soll die Mittelkraftlinie gezeichnet und der größte Bodendruck berechnet werden.*

Die Gewichte der Mauerabschnitte werden für $\gamma_m = 2$ t/m³ berechnet. Man erhält

$$\text{I} = 1{,}15 \cdot 2 = 3{,}30 \text{ t}$$
$$\text{II} = 2{,}485 \cdot 2 = 4{,}97 \text{ t}$$
$$\text{III} = 2{,}65 \cdot 2 = 5{,}30 \text{ t}$$
$$\text{IV} = 2{,}85 \cdot 2 = 5{,}70 \text{ t} .$$

Diese Mauergewichte sind mit den aus der Fig. 87 gewonnenen Erddrücken (in Fig. 89) zusammengesetzt und der Pol O in den Anfang des Kräftezuges I—E_1—II—E_2—III—E_3—IV—E_4 gelegt worden. Sodann werden in der Fig. 88 die Angriffspunkte der Teilerddrücke ermittelt, nach dem (unter **24**, a) gegebenen Verfahren unter Auftragen der Gesamterddrücke. Danach wurde gemacht:

die Strecke $i_1 k_1 = E_1$
" " $i_1 k_1' = E_{1-2}$
" " $i_2 k_2 = E_2'$.

Daraus erhält man:

$$\overline{i_2 k_2} - \overline{i_1 k_1'} = \overline{l_2 k_2} = E_2 .$$

Ferner:

die Strecke $i_2 k_2' = E_{2-3}$
" " $i_3 k_3 = E_3'$

die Strecke $l_3 k_3 = E_3$.

Schließlich:

die Strecke $i_3 k_3' = E_{3-4}$
" " $i k = E_4'$

die Strecke $l k = E_4$.

Jede der schraffierten Flächen wurde in ein Rechteck verwandelt, dessen Höhe den *Angriffspunkt* des zugehörigen Erddruckes festlegte. So fanden sich die Punkte e_1, e_2, e_3 und e_4, durch welche die Richtung je eines der bereits gefundenen Erddrücke verläuft. Die Mittelkraftlinie war jetzt gegeben,

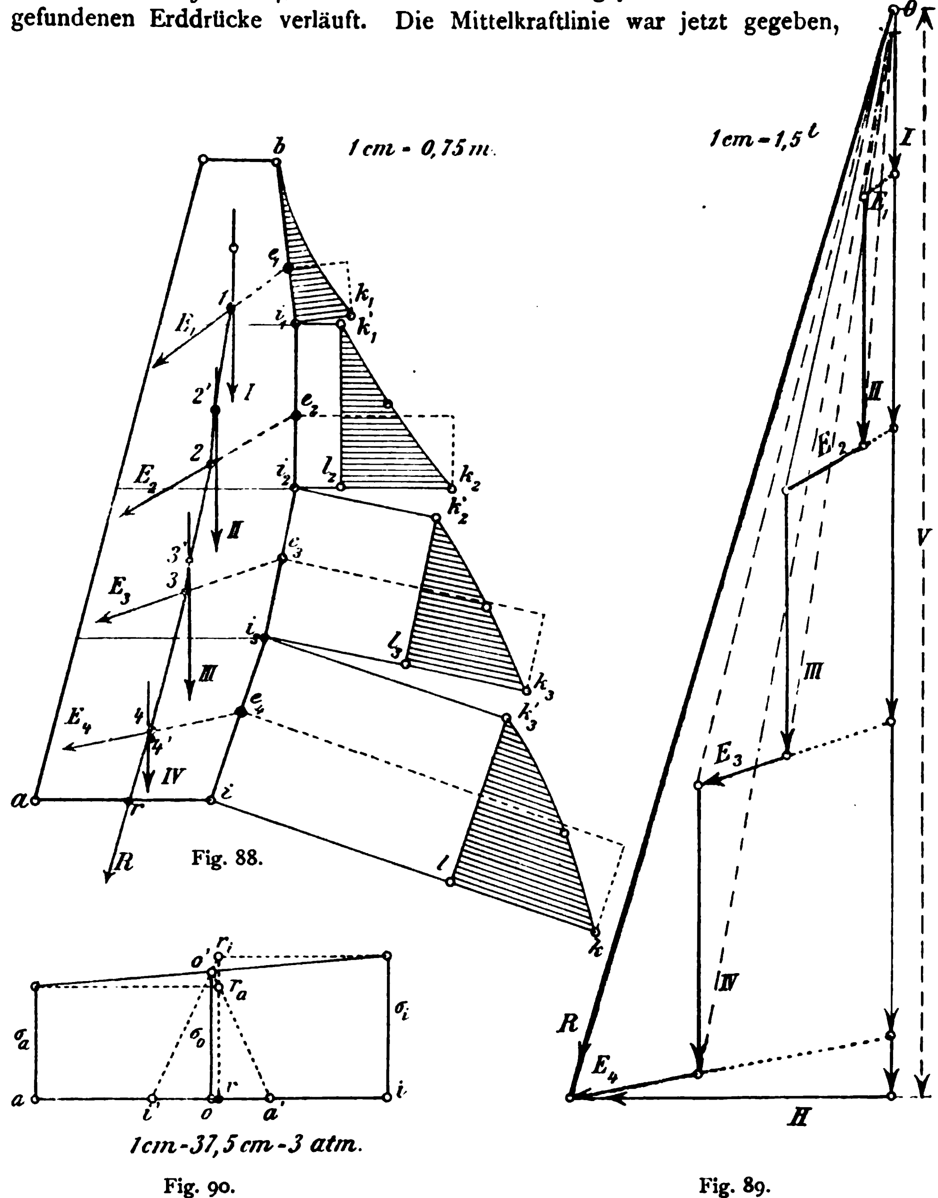


Fig. 88.

Fig. 90.

Fig. 89.

sie ist mit roter Farbe in Fig. 88 eingezeichnet. Die letzte Seileckseite, die dem Strahle R des Kraftecks der Fig. 89 parallel ist, trifft die Sohle ai im Punkte r, dem *Stützpunkte*. Seine Lage entscheidet die Frage nach der vorhandenen Sicherheit der Mauer.

Die *Verteilung des Bodendruckes* über die Sohlenfuge ai ist in Fig. 90 mit Hilfe der Einflußlinien der Randspannungen (I. **110**) graphisch dargestellt: Der Stützpunkt r liegt innerhalb des Kernes, deshalb sind *beide* Randspannungen, sowohl σ_a als auch σ_i *Drücke*. Der mittlere Druck σ_0 berechnet sich mit

$$\sigma_0 = \frac{V}{F} = \frac{21650}{174 \cdot 100} = 1{,}24 \text{ atm},$$

wenn V die lotrechte Seitenkraft der Mittelkraft R ist. Die wagerechte Seitenkraft H ist mit 6400 kg abzugreifen. Nimmt man die Reibungsziffer zwischen Sohle und Erde mit 0,57 an, was einem Reibungswinkel von 30^0 entspricht, so ist

$$\frac{0{,}57 \cdot V}{H} = \frac{0{,}57 \cdot 21650}{6400} = 1{,}93$$

d. h. es ist 1,93 fache Sicherheit gegen *Verschieben* der Mauersohle vorhanden.

Die Drücke in den Randpunkten a und i berechnen sich aus

$$\sigma_i = \frac{M_{ka}}{F k_a} = \frac{21650\left(\frac{174}{6} + 4\right)}{174 \cdot 100 \cdot \left(\frac{174}{6}\right)} = 1{,}4 \text{ atm}$$

$$\sigma_a = 2 \cdot \sigma_0 - \sigma_i = 2{,}48 - 1{,}4 = 1{,}08 \text{ atm.}$$

b. Gebrochene Wand mit Überlast von Einzelkräften.

Aufgabe. Für die in der Fig. 91 dargestellte Stützmauer, auf deren gerader Erdlinie in p eine Einzellast P ruht, sollen die *Erddruckdreiecke*, die *Mittelkraftlinie* und die *Bodendrücke* dargestellt werden.

1. Die *Darstellung der Erddruckdreiecke* (Fig. 91) und der beiden Gleitflächen für $P = o$ und $P = P$ im Angriffspunkt p erfolgte nach **22**, a. Zur Nachprüfung wurde der mit Hilfe der Stellungslinie ps gefundene Punkt d_3 nochmals festgelegt. Dazu wurde das Überlastdreieck pln in ein Dreieck $i_3 b_3 n$ verwandelt und

$$\text{Fl. } i_3 i_3 k p = \text{Fl. } \triangle\, i_3 u_3 p$$

gemacht. Weiter: Stellungslinie $b_3 f_3$, Senkrechte $f_3 f_3'$ und Sehne $i_3 f_3'$ des betreffenden Halbkreises gleich $\overline{i_3 d_3}$ gefunden. Ebenso wurde der Punkt d im Druckdreiecke cdm für den Druck

$$E_4' = \gamma \cdot 1 \cdot \text{Fl. } \triangle\, cdm$$

nachgeprüft. Also

$$\text{Fl. } i i_1 k p = \text{Fl. } \triangle\, iup; \quad \text{Fl. } \triangle\, itu = \text{Fl. } pln$$

gemacht. Stellungslinie tf usw.

2. In Fig. 92 wurde aus E_1 bis E_4 und den Mauergewichten I bis IV ein Krafteck gezeichnet, sein Pol in die Ecke O gelegt und die Strahlen 1 bis 7 gezogen. Die Angriffspunkte der Erddrücke folgen aus Fig. 93, worin mit den Höhen oi_1, oi_2, oi_3, oi — sonst im beliebigen Maßstabe — die den Erddrücken E_1 bis E_4 entsprechenden Dreiecke gezeichnet wurden. Damit erhielt man die Schwerpunkte s_1 bis s_4 und die zugehörigen Angriffspunkte der Erddrücke.

3. Danach konnte die *Mittelkraftlinie* im Mauerquerschnitt der Fig. 91 gezeichnet werden. r ist der Stützpunkt der Mittelkraft R. Die *Spannungen* und den *Bodendruck* in den Kantenpunkten a und i berechnet man nach dem in den Fig. 30—32

(unter **6**, S. 27) angegebenen Verfahren. In der Fig. 94 ist die untere Partie der Mittelkraftlinie mit dem Stützpunkt *r* — dessen Lage für die Beurteilung der Standsicherheit der Stützmauer entscheidend ist (Fig. 53) — in vergrößertem Maßstabe aufgetragen.

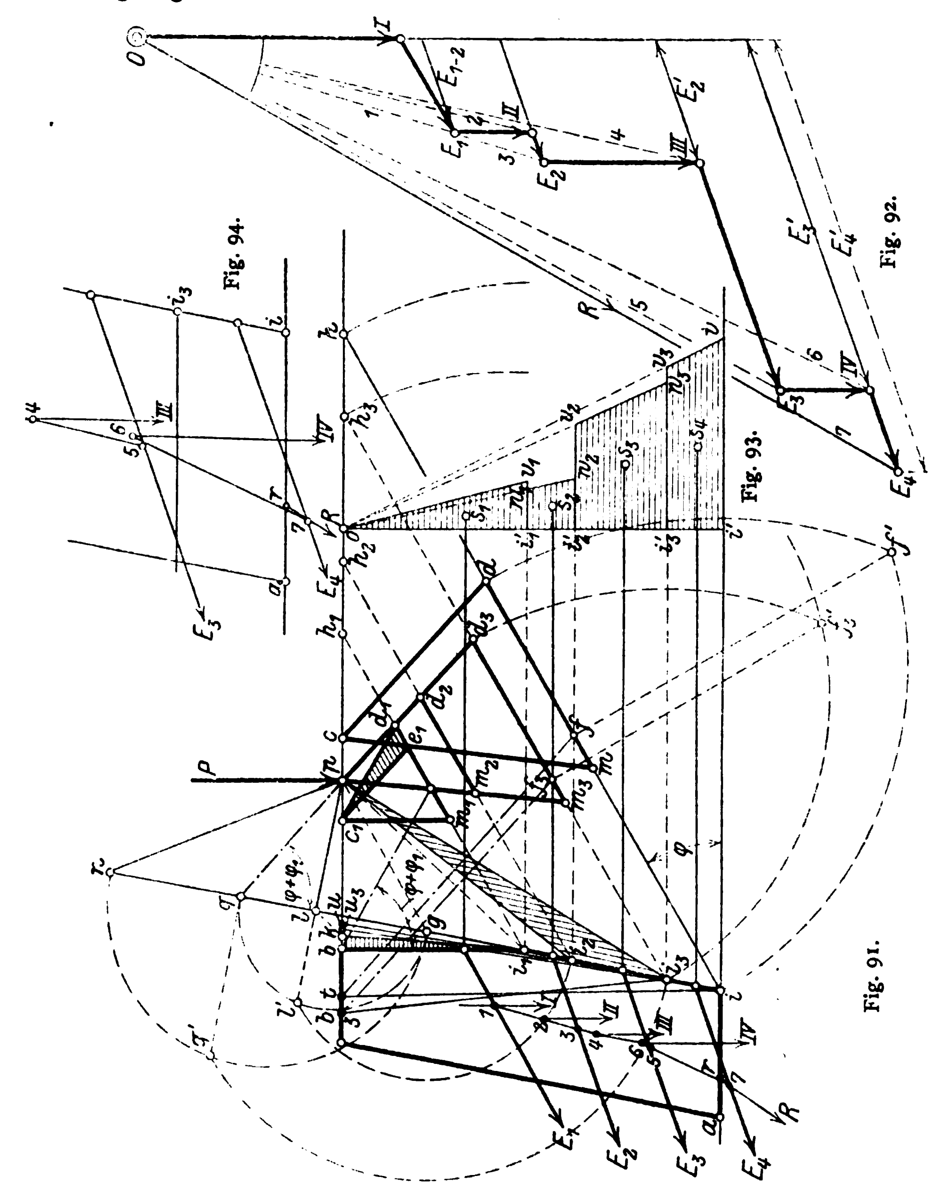


Fig. 91. Fig. 92. Fig. 93. Fig. 94.

Aufgabe. Eine 10,2 m hohe, in der Krone 2 m und an der Sohle 4 m breite Ufermauer besitzt eine wagerechte Hinterfüllung aus feinem Sand oder Kies (Fig. 95), in welcher ein Langschwellengleis liegt, das von schweren Lokomotiven befahren wird, wie sie im Anhange (unter **33**, b) dargestellt sind. Das Hochwasser vor der

Mauer steigt bis auf etwa 1 m unter Kronenhöhe, das niedrigste Wasser steht 2 m über der Sohle. Es kommen Fälle vor, wo das Hochwasser plötzlich fällt, so daß die Hinterfüllung bei niedrigstem Wasserstande oft noch stark durchnäßt ist (**15** b, 3—4). Unter Berücksichtigung des Wasserdruckes und der Lokomotivlasten ist *die Mittelkraftlinie zu zeichnen und danach der größte Bodendruck zu ermitteln.*

Lösung:

1. *Die Belastungen.* Die Gewichte werden mit

$$\gamma_e = 1{,}6 \text{ t/m}^3$$
$$\gamma_m = 2{,}0 \text{ t/m}^3$$

berechnet. Der Winkel φ der natürlichen Böschung des *durchfeuchteten* Erdreiches und der Reibungswinkel φ_1 sollen gleich angenommen werden,

$$\varphi = \varphi_1 = 25^0$$
$$\varphi + \varphi_1 = 50^0.$$

In einem besonderen Falle, wo in der Hinterfüllung oben eine *trockene*, mitten eine *plastisch feuchte* und unten eine *völlig durchnäßte* Schicht (nach **15** b, 3) vorhanden wäre, könnte man den *Erddruck für jede Schicht* für sich berechnen und dabei *verschieden große Böschungswinkel* φ annehmen.

Die Mitte des Langschwellengleises liegt $7 + 1{,}5/2 = 7{,}75$ m vom Kronenpunkte b entfernt. Der auf jeden Schienenstrang kommende Raddruck beträgt 8,5 t. Es fragt sich nun, wieviel von den 5 Radlasten von je 8,5 t auf 1 m Tiefe der Hinterfüllung zu rechnen sein wird. Würden die Lasten durch die Langschwellen ganz gleichmäßig auf der Hinterfüllung verteilt werden, so hätte man $P = 8{,}5/1{,}5 = 5{,}7$ t zu rechnen. Bei schlechter Lage des Gleises, Senkungen und dgl. kann aber die Verteilungsfläche erheblich kleiner werden. Deshalb wird angenommen, *daß die Raddrücke von* $2 \cdot 8{,}5$ t *allein von einer* 1 m *tiefen und* 1,5 m *breiten Fläche aufzunehmen sind.*

Das Hochwasser vor der Mauer gefährdet deren Standfestigkeit nicht, obwohl bei steigendem Wasser der Poreninhalt der Hinterfüllung sich auch mit Wasser füllt (**15**, b und **25**, a). Der gefährlichste Zustand der Mauer tritt bei niedrigstem Wasserstande ein, wenn die Hinterfüllung noch durchfeuchtet ist und dadurch deren Reibungswinkel φ und φ_1 kleiner werden. Es werden also zu berücksichtigen sein

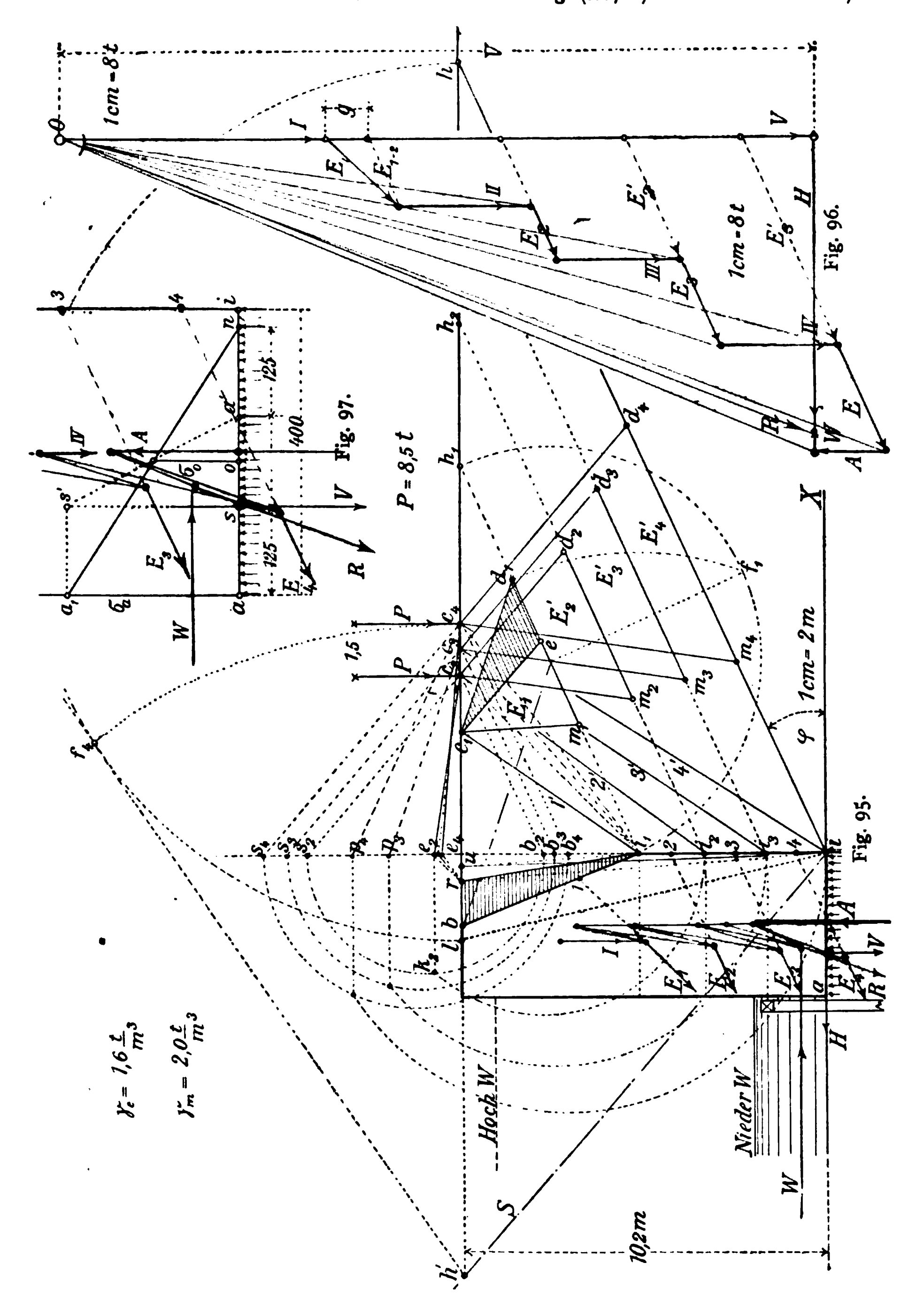
der Wasserdruck $\quad W = \frac{\gamma \cdot 2^2}{2} = 2$ t

der Auftrieb $\quad A = 2 \cdot 4 \cdot \gamma = 8$ t.

2. *Die Gleitflächen und Druckdreiecke* sind der Reihe nach in Fig. 95 dargestellt. Die Gleitfläche $i_1 c_1$ für die obere schräge Wandfläche ist in bekannter Weise (nach **17**) mit Hilfe des Halbkreises über der Böschung $i_1 h_1$ gefunden worden. Die unter 50^0 gegen die Wandrichtung geneigte Stellungslinie verlief dabei durch b. Das Druckdreieck $c_1 d_1 m_1$ ergab

$$E_1 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_1 d_1 m_1 = 11{,}15 \text{ t}.$$

Jetzt wurde die Gleitfläche *ohne Überlast* für den Angriffspunkt c_2 der Radlast P gesucht. Wie zu übersehen ist, fällt ihr Fußpunkt i_2 in die *lotrechte* Hinterwand der Mauer. Es muß deshalb das Gewicht g (**23**, b) berechnet werden, das



vom Gewicht des Gleitprismas $i_2 i_1 b c_2$ abzuziehen ist. Deshalb wurde im Druckdreieck für E_1 die Parallele $c_1 e$ zur Stellungslinie iS der untern Wand gezogen. Das so erhaltene (schraffierte) Dreieck $c_1 d_1 e$ wurde dann (nach Fig. 79 unter **23**, b) in ein flächengleiches Dreieck $i_1 b r$ verwandelt. Das ergab

$$g = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle i_1 b r = 4{,}8 \text{ t}.$$

Durch Ziehen von

$$\overline{r e_2} \parallel \overline{i_1 c_2}$$

erhielt man den *dreieckigen* Prismaquerschnitt $i_1 e_2 c_2$, dessen Spitze e_2 in der Wandrichtung $i i_1$ liegt und das dem Gleitprisma $i_2 i_1 r c_2$ gleichwertig ist. Die Gleitfläche $i_2 c_2$ konnte jetzt bestimmt werden, nachdem vorerst noch durch c_2 Parallelen zur Böschungslinie und zur Stellungslinie iS gezogen worden waren. Das sind die Parallelen $c_2 b_2$ und $\overline{c_2 s_2}$: Über der $b_2 s_2$ der Halbkreis; durch e_2 Senkrechte zur $i e_2$, die den Kreis in k_2 schneidet. Dann ist (nach **20**) die Sehne $b_2 k_2$ gleich der gesuchten Wandstrecke $b_2 i_2$.

Macht man $\overline{c_2 d_2}$ parallel zur Stellungslinie iS und gleich der $d_2 m_2$, so erhält man das Druckdreieck für E_2', d. h. für den *gesamten* Erddruck, der von dem Gleitprisma $i_2 i_1 b c_2$ *in der Richtung des Erddruckes* E_2 auf die Wandstrecke $i_1 i_2$ ausgeübt wird. Es ist also (nach Gl. 51 unter **23**, a)

$$E_2 = E_2' - E_{1-2}.$$

Man vgl. dazu die Fig. 96, worin das Kraftdreieck aus E_1, E_{1-2} und g dargestellt ist, um zu erkennen, wie auch E_3 und E_4 durch die Größen E_3' und E_4' ohne weiteres gegeben sind.

Zwischen ihren Angriffspunkten c_2 und c_4 soll sich (nach unserer Annahme) das Gewicht der beiden Radlasten P gleichmäßig verteilen. In c_3 hört also die Wirkung *eines* der Gewichte auf. Für c_3 ist die nächste Gleitfläche gezeichnet. Vorher wurde 1) das Gleitprisma $i_2 i_1 r c_3$ (in bekannter Weise) in ein gleichwertiges Dreieck $i_3 e_3 c_3$ verwandelt (Punkt e_3 liegt zwischen e_2 und e_4) und 2) wurde

$$P = 8{,}5 \text{ t} = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_3 e_3 p_3 \text{ gemacht:}$$

Halbkreis über der $b_3 s_3$ usw. Damit war auch das Druckdreieck für E_3' gegeben usw.

Endlich wurde die Gleitfläche für den Angriffspunkt c_4 der zweiten Radlast P gezeichnet:

$$\overline{r e_4} \parallel \overline{i_1 c_4}$$

und

$$\gamma_e \cdot 1 \,.\, \text{Fl.} \triangle c_4 e_4 p_4 = 2\,P = 17 \text{ t}.$$

Dabei traf *zufällig* der Fußpunkt c_4 fast genau mit dem Punkte i zusammen. Deshalb wurde die Höhe der Mauer auf 10,2 m abgestimmt, so daß jetzt in Wirklichkeit i der Fußpunkt der Gleitfläche für den Angriffspunkt c_4 geworden ist.

Danach verteilt sich die erste Einzellast P über die Wandstrecke $i_2 i_3$ und die zweite über die Strecke $i_3 i$.

3. *Eine Nachprüfung der gefundenen Lage der Gleitfläche* $i c_4$, und dadurch der Erddrücke E_4' und E_4 wurde mit Hilfe *eines über der verlängerten Erdlinie*

geschlagenen Halbkreises (**17**, a) ausgeführt. Dabei ist zuerst die Fläche $i i_1 r c_4$ in ein gleichwertiges Dreieck $i u c_4$ verwandelt und sodann ein Dreieck $u l i$ angetragen worden, so daß

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle u l i = 2 P = 17 \text{ t}$$

wurde.

Halbkreis über der $\overline{l h}$; vom Schnittpunkte h' der verlängerten Erdlinie und der Stellungslinie $i S$ eine Tangente daran gelegt, die in f_4 berührt. Dann muß

$$\overline{h' f_4} = \overline{h' c_4}$$

sein, was auch der Fall ist. In ähnlicher Weise können auch noch die gefundenen Lagen der andern Gleitflächen nachgeprüft werden.

4. *Die Mittelkraftlinie.* Es berechnen sich

die Erddrücke	die Mauergewichte
$E_1 = 11{,}15$ t	I $= 30{,}0$ t
$E'_2 = 15{,}10$ t	II $= 14{,}8$ t
$E'_3 = 25{,}67$ t	III $= 13{,}6$ t
$E'_4 = 38{,}54$ t	IV $= 13{,}2$ t
	$71{,}6$ t.

Dazu

$$W = 2 \text{ t und } A = 8 \text{ t}.$$

Diese äußern Kräfte sind in der Fig. 96 zu einem *Krafteck* zusammengesetzt worden.

Die *Angriffspunkte* der Kräfte und ihre Richtigungen liegen fest: E_1 greift im obern Punkt des untern Drittels der Wandstrecke $b i_1$ an; E_2, E_3, E_4 greifen in *der Mitte* der betreffenden Wandstrecken an, wenn man (genau genug) die Linien der Darstellung der Gesamterddrücke (vgl. Fig. 88 S. 115) als *Gerade* ansieht (**22**, a). Wird dann der Pol O (wie in der Fig. 96 geschehen) in die Ecke des Kraftecks gelegt, so läßt sich das *Seileck* der Mittelkraftlinie zwischen den festgelegten Kraftrichtungen zeichnen.

Weil die Mittelkraftlinie in der Nähe der Sohle (wegen des kleinen Maßstabes in Fig. 95) etwas undeutlich ausgefallen ist, so ist sie in der Fig. 97 nochmals im doppelten Maßstabe der Fig. 95 wiedergegeben worden.

5. *Der Bodendruck.* Die Mittelkraft R fällt ein wenig außerhalb des Kerns, so daß auf der Strecke $n i$ der Sohle die Spannung zu Null wird. Die allein widerstehende Druckzone ist (nach I. **129**) dreimal so breit, als die Strecke $a s$. Der mittlere Bodendruck berechnet sich mit

$$\sigma_0 = \frac{V}{F} = \frac{84800}{3 \cdot 125} = 2{,}26 \text{ atm},$$

σ_a ist doppelt so groß, also

$$\sigma_a = 4{,}52 \text{ atm}.$$

Die wagerechte Seitenkraft von R ist

$$H = 33000 \text{ kg}.$$

Wird der Reibungswinkel zwischen Sohle und dem *nassen* Untergrunde gleich $\varphi = \varphi_1 = 25^0$ angesetzt, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = 0{,}466$$

und

$$\frac{V \operatorname{tg} \varphi}{H} = \frac{84800 \cdot 0{,}466}{33000} = 1{,}2.$$

Das bedeutet nur eine 1,2fache Sicherheit gegen Verschieben der Mauer auf dem Untergrunde.

§ 4. Die Theorie des Erddruckes nach Mohr.

27. Einleitung.

a. Allgemeines und Geschichtliches. Wie (unter 13a) bereits dargelegt worden ist, hat MOHR[86] gegen die Erddrucktheorie von COULOMB schon frühe (1871 bis 1872) gerechtfertigte Bedenken erhoben. Wenn trotzdem diese weit über 100 Jahre alte Theorie immer noch die herrschende geblieben ist, so liegt das an dem heutigen Mangel einer Theorie, die zur *Berechnung von Stützmauern* verwendet werden kann. Das hat folgende Gründe. Die Berechnung des Erddruckes ist unter allen Umständen eine statisch unbestimmte Aufgabe, weil die Zahl der Überzähligen diejenige der gegebenen Gleichgewichtsbedingungen weit übertrifft. Wollte man diese Überzähligen finden, so müßte man dabei die kleinen *elastischen Formänderungen* der Mauer und der Hinterfüllungserde, wie solche bis zum Augenblicke der Vollendung des Bauwerkes entstehen, in Rechnung ziehen, und die fehlenden Bedingungsgleichungen aus den zwischen jenen und den sie erzeugenden äußeren Kräften bestehenden Beziehungen zu erhalten suchen. Diese Beziehungen sind aber unbekannt, und wahrscheinlich auch nicht von allgemeiner Gültigkeit, sondern von Fall zu Fall wechselnd. Deshalb ist jeder Versuch, die gestellte Aufgabe auf dem beschriebenen Wege zu lösen, aussichtslos. Es bleibt dazu nur ein gangbarer Weg: zulässige und wahrscheinliche Annahmen über die *Spannungszustände im Erdreich* zu machen, und wenn möglich durch Versuche festzustellen. Die bisherigen Erfahrungen sprechen allerdings dagegen, daß auf solchem Wege einwandfreie Versuchsergebnisse erzielt werden können. So ist denn die alte Theorie von COULOMB, obwohl sie die Gesetze des Gleichgewichtes nicht voll erfüllt, immer noch die herrschende geblieben, und zwar besonders deshalb, weil ihre Ergebnisse für das praktische Bedürfnis ausreichende Sicherheit gewährleisten.

b. Voraussetzungen der Theorie. Die *einfachsten und natürlichsten Voraussetzungen über den Spannungszustand des Erdreiches hinter einer Stützmauer* hat RANKINE[87] gemacht. Analytische Darstellungen seiner Theorie gaben LÉVY, CON-

[86] MOHR. Beiträge zur Theorie des Erddruckes. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins in Hannover. 1871, S. 344 und 1872, S. 67 u. 245. — *Derselbe.* Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. 1906, S. 220—240. — *Derselbe.* Eine neue Theorie des Erddruckes. Zeitschr. für Architektur und Ingenieurwesen. 1907. Heft 5.

[87] RANKINE. On the stability of loose earth. Philosophical Transactions of the London Royal Society. 1856—57. — *Derselbe.* A Manual of applied mechanics. 1861.

SIDÈRE und WINKLER[88]. Graphische Darstellungen dazu gab WEYRAUCH. Die graphische Theorie von MOHR stützt sich auf die Voraussetzungen von RANKINE, ist aber im übrigen völlig selbständig. RANKINE betrachtet die *Spannungszustände in einem gleichartigen, losen, also schub- und zugfestigkeitsfreien Erdkörper*, der nur von einer ebenen Oberfläche begrenzt, seitlich aber unbegrenzt ist. Die Gleichartigkeit fordert, daß die natürliche Beschaffenheit, das Raumgewicht γ_e und der Reibungswinkel φ in allen Teilen des Erdkörpers übereinstimmen. *Danach werden alle Körperpunkte einer zur Oberfläche parallel gedachten Ebene sich in einem und demselben Spannungszustande befinden.* Einer Verschiebung der Teile gegeneinander setzt sich nach obigem nur die Reibung entgegen. Deren Größe ist dem in der Trennungsfläche herrschenden senkrechten Drucke proportional. Die Grenzwerte der in jener Fläche *allein von der Reibung verursachten Schubspannungen* τ_r sind demnach mit

$$+\sigma \operatorname{tg} \varphi > \tau_r > -\sigma \operatorname{tg} \varphi \qquad (57)$$

anzuschreiben, wenn σ die *Normalspannung* in den betrachteten Flächenteilchen vorstellt. Außer der durch Gleichung (57) ausgedrückten Bedingung gelten hier auch noch die im ersten Bande (I, § 17a) für den *Spannungszustand eines Körperpunktes* (nach MOHR) abgeleiteten und graphisch dargestellten Spannungswerte, weil die einzige Voraussetzung bei ihrer Ableitung — daß nämlich der Spannungszustand eines Körperpunktes sich mit dessen Ort *stetig* ändert — auch für den gleichartigen Erdkörper Gültigkeit hat.

28. Die Spannungen im Erdkörper.

a. Die Spannungen in einem Körperpunkte. Der Spannungszustand irgend eines Körperpunktes m ist eindeutig beschrieben, wenn für drei durch den Punkt gelegte beliebige unendlich kleine Schnittflächen die Spannungen vorbestimmt worden sind (I, S. 382). Die drei *Hauptebenen* des Punktes m schneiden sich rechtwinklig und ihre Schubspannungen sind Null. Die in den *Hauptrichtungen* X, Y, Z liegenden *Hauptnormalspannungen* sollen hier kurzweg *Hauptspannungen* genannt werden. Es sind die *Grenzwerte*

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \sigma_z.$$

Im vorliegenden Falle ist *eine der Hauptrichtungen aus Symmetriegründen bekannt.* Sie ist für jeden Punkt m *wagerecht* und zur Erdoberfläche parallel, denn die zu ihr rechtwinklig stehende XZ-Ebene zerlegt den Erdköiper in zwei völlig symmetrisch gestaltete Teile, und kann deshalb keine Schubspannungen übertragen. In dem besonderen Falle, wenn die Oberfläche des Erdkörpers *wagerecht* liegt — wie das in praktischen Fällen, bei Stützmauern, in der Regel so ist —, sind danach alle Lotrechtebenen Hauptebenen, und in jedem Körperpunkte werden Spannungen von gleicher Größe übertragen. Wenn die Erdoberfläche eine geneigte Lage hat, sind die Hauptrichtungen X und Z unbekannt, und nur *in gewissen Grenzfällen* bestimmbar.

---

88 LÉVY. Essai sur une théorie nouvelle de l'équilibre des terres etc. Journal de Mathématiques pures et appliquées. 1873. — CONSIDÈRE. Note sur la poussée des terres. Annales des ponts et chaussées. 1870. I, S. 547. — WINKLER. Neue Theorie des Erddrucks, Zeitschr. des österr. Ing.- u. Arch.-Vereins. 1871, Heft 5.

In fast allen Anwendungen der Theorie des Erddruckes kommen nur diejenigen Spannungen in Betracht, die durch die Hauptrichtung Y verlaufen. Sie können (nach MOHR) durch einen *Kreis* der XZ-Ebene — den *Hauptkreis* — in bekannter Weise dargestellt werden (I, S. 386—389).

b. Der Festpunkt eines Hauptkreises. Die folgenden Darlegungen stützen sich auf das im ersten Bande über die *Spannungen an der Oberfläche einer unendlich kleinen Kugel im Innern eines Körpers* Gesagte (I. § 17a, S. 382—384). Danach gibt es unter allen durch die wagerechte Y-Achse eines Körperpunktes m im Erdreiche gelegten unendlich kleinen Flächen nur eine einzige, in welcher eine nach Größe und Richtung *unveränderliche* Spannung auftritt. Das ist die zur Erdoberfläche *parallel* liegende Fläche. In allen übrigen, die unendlich kleine Kugel des Körperpunktes m berührenden Flächen kann die Spannung innerhalb gewisser Grenzen verschiedene Werte annehmen.

Wenn die genannte *unveränderliche Spannung* mit ϱ_0 bezeichnet wird, so müssen die Hauptkreise XZ aller möglichen Spannungszustände des Punktes m durch einen *Festpunkt* r_0 verlaufen, dessen Koordinaten durch die Normalspannung σ_0 und die Schubspannung τ_0 jenes parallel zur Erdoberfläche gerichteten Flächenelementes festzulegen sind. Sobald dieser Festpunkt gegeben ist, findet man in bekannter Weise die Normal- und Schubspannung für jede beliebig gerichtete, die unendlich kleine Kugel m berührende Fläche. Wie dies geschehen kann, soll jetzt gezeigt werden.

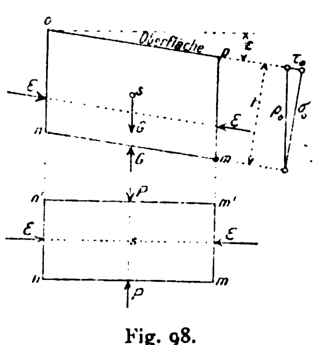


Fig. 98.

In der Fig. 98 ist in Ansicht und Grundriß ein Erdprisma dargestellt, dessen obere und untere Fläche parallel zur Erdoberfläche gerichtet sind, und dessen übrige vier Flächen lotrecht stehen. Die Flächen mn und mp verlaufen durch die wagerechte Y-Achse der unendlich kleinen Kugel im Punkte m. Die beiden Seitenflächen $mnop$ und $m'n'o'p'$ scheiden die Y-Achse rechtwinklig, bilden also für jeden ihrer Punkte eine *Hauptebene*.

Setzt man den Inhalt der unteren Fläche $mnn'm'$ gleich der Flächeneinheit und ihren Abstand von der *unbelasteten* Erdoberfläche gleich t, so ist im Gleichgewichtsfalle das im Schwerpunkt s des Prismas angreifende Erdgewicht $1 \cdot \gamma_e t$ gleich dem lotrechten Gegendrucke G in der Unterfläche. Das gibt die Bedingung

$$G = 1 \cdot \gamma_e t. \tag{58}$$

Ist ϱ_0 die unveränderliche Spannung in der Unterfläche, so ist

$$G = 1 \cdot \varrho_0$$

und

$$\varrho_0 = \gamma_e t. \tag{59}$$

Die Seitenkräfte der Spannung ϱ_0 sind danach

$$\sigma_0 = -\varrho_0 \cos\varepsilon\,; \quad \tau_0 = +\varrho_0 \sin\varepsilon\,,$$

wenn der Neigungswinkel ε der Erdoberfläche gegen die Wagerechte für die von links nach rechts fallende Neigung positiv gerechnet wird. Das gibt

$$\sigma_0 = -\gamma_e t \cos\varepsilon\,; \quad \tau_0 = \gamma_e t \sin\varepsilon\,. \tag{60}$$

σ_0 ist stets negativ. τ_0 hat immer das Vorzeichen von $\sin\varepsilon$ (I, S. 385). In den folgenden graphischen Darstellungen ist der Bequemlichkeit wegen das Raumgewicht γ_e = »Eins« gesetzt worden, damit alle Strecken der Darstellung nach dem *Längenmaße* abgegriffen werden können.

29. Graphische Darstellung des Spannungszustandes im Punkte *m* (Fig. 99).

a. Der Festpunkt.

Der Punkt *m* wird (nach der Gl. (59) für γ_e = »Eins« im Abstande *t* von der Oberfläche festgelegt und mit dem Halbmesser *t* ein Kreisbogen geschlagen. Dieser schneide eine durch *m* zur Erdoberfläche gelegte Parallele in r_0.

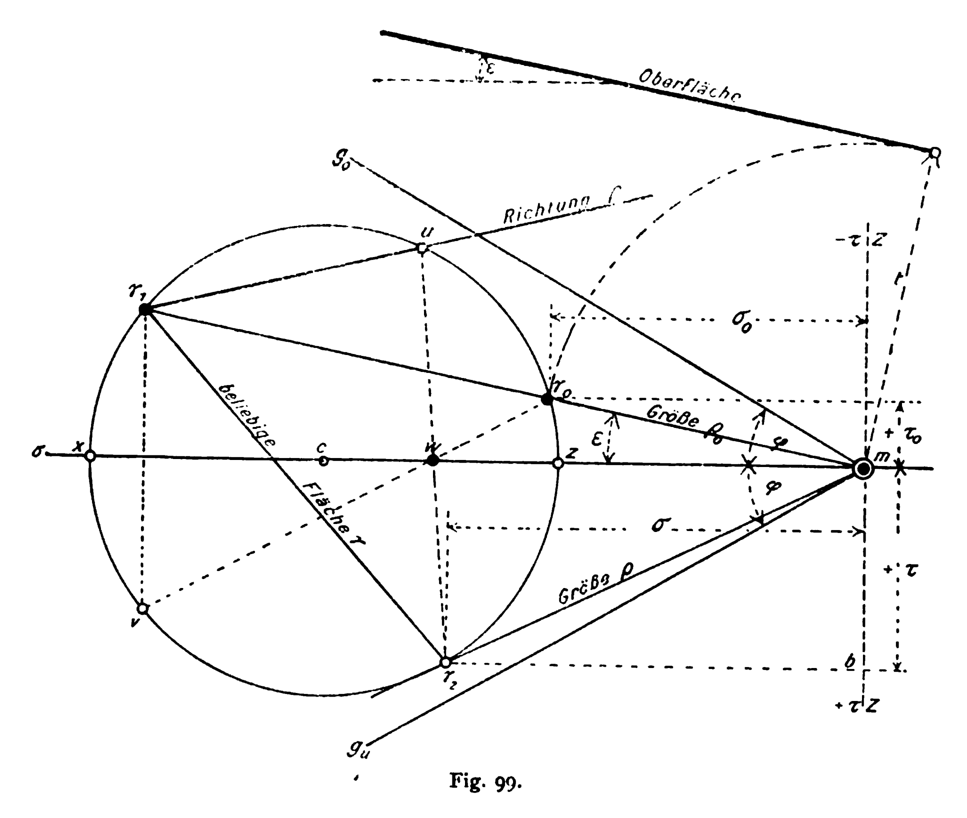


Fig. 99.

Dann ist r_0 der Festpunkt und die Strecke $mr_0 = \varrho_0$ die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen beide Katheten die Größen der Normalspannung σ_0 und der Schubspannung τ_0 vorstellen, wobei die Strecke σ_0 parallel der wagerechten *X*-Achse und die Strecke τ_0 parallel der *Z*-Achse liegt. Das positive τ_0 sucht die unendlich kleine Kugel in *m* im Sinne der Uhrzeigerbewegung zu drehen. Die beiden durch die wagerechte *Y*-Achse in *m* gelegten Elementarflächen — von denen die eine parallel zur Erdoberfläche und die andere lotrecht gerichtet ist — sind einander *zugeordnet* (I. S. 384), denn die Spannung von *mn* ist parallel zur *mp* und die Spannung von *mp* parallel zur *mn* gerichtet (Fig. 98).

b. Der Hauptkreis.

1. Um den *Hauptkreis* der XZ-Ebene innerhalb der möglichen Spannungsgrenzen anlegen zu können, sind vorher die *Grenzlinien* der Hauptkreise derart zu zeichnen, daß sie der Gl. (57)

$$+\sigma \operatorname{tg} \varphi > \tau > -\sigma \operatorname{tg} \varphi$$

genügen. Danach müssen die beiden Grenzlinien der Gleichung der geraden Linien

$$\tau = \pm \sigma \operatorname{tg} \varphi$$

entsprechen. Das sind in der Fig. 99 die beiden Geraden mg_0 und mg_u, zwischen denen also alle Hauptkreise eines jeden Körperpunktes m liegen müssen.

Mit beliebigem Durchmesser zeichne man jetzt einen durch r_0 verlaufenden Hauptkreis, dessen Mittelpunkt in die X-Achse fällt und dessen Kreislinie die Grenzlinien wohl berühren, aber nicht schneiden darf. Verlängert man dann die Gerade mr_0, bis sie den Hauptkreis im Punkte r_1 trifft, so ist r_1 ein weiterer Festpunkt, mit dessen Hilfe die Spannung ϱ, die Normalspannung σ und die Schubspannung τ irgendeines anderen durch die wagerechte Y-Achse an die unendlich kleine Kugel in m gelegten Flächenelementes r wie folgt dargestellt werden kann.

2. Man ziehe im Hauptkreise eine Sehne rr parallel zur Stellung des beliebigen Flächenelementes x. Dann erhält man auf oder parallel zu der X- und Z-Achse die entsprechenden Strecken

$$\overline{mr} = \varrho\,; \quad \overline{br} = \sigma\,; \quad \overline{mb} = \tau\,.$$

Die *Richtung* von ϱ erhält man folgendermaßen: man ziehe die lotrechte Kreissehne $r_1 v$ und die Sehne $v r_0$. Diese schneidet die X-Achse in w. w ist wieder ein Festpunkt. Zieht man jetzt durch r und w die Sehne rwu, so bestimmt die Gerade $r_1 u$ die *Richtung* von ϱ (I, S. 386—389).

30. Darstellung der Grenzzustände im Körperpunkte m (Fig. 100). Die durch den Festpunkt r_0 verlaufenden beiden *Hauptkreise* XZ und xz berühren die vorerwähnten Grenzlinien mg_0 und mg_u in den Punkten g_0, g'_0, g_u, g'_u und bilden die Grenzen für die Spannungszustände im Punkte m.

a. Der kleine Hauptkreis.

1. Der kleinere Hauptkreis bestimmt den *unteren*, der größere den *oberen* Grenzzustand. Die durch m gehende Parallele zur Erdoberfläche schneidet beide Kreise in den Festpunkten r_0, r_1, r_2. Den Festpunkt w findet man wie unter 27b (nach den Darlegungen unter I. § 17a).

Danach bezeichnet im kleinen Hauptkreise die Strecke mz die kleinste im Punkte m überhaupt mögliche *Normal*spannung σ_x. Sie nimmt die Richtung $r_2 x$ und ihr Flächenelement ist daher nach der $r_2 z$ gerichtet. Die beiden Geraden $r_2 x$ und $r_2 z$ sind zugleich *Hauptrichtungen* des Punktes m, in welche die kleinsten Werte der Normalspannungen σ fallen.

2. Wenn durch irgendeine mögliche äußere Einwirkung der durch die Strecke $\overline{mz}$ dargestellte Kleinstwert von σ sich noch verringert, so wird das Gleichgewicht im Punkte m gestört, denn der kleine Hauptkreis müßte, um die erwähnte Verringerung zuzulassen, die Grenzlinien in den Kreispunkten g_u und g'_u überschreiten.

Dadurch würde aber auch die Schubspannung τ ihren Größtwert $\sigma \operatorname{tg} \varphi$ überschreiten, d. h. *die Erdteilchen in den beiden Flächenelementen der Richtungen* $r_2 g_u$ *und* $r_2 g'_u$ *würden sich gegeneinander verschieben.* Diese beiden Richtungen bestimmen also die *Stellungen der Gleitflächen im Körperpunkte* m. Beide Flächen sind (wie unter **29** erwähnt) einander zugeordnet, weil die Gerade $g'_0 g'_u$ durch den Festpunkt w' verläuft. Der Zentriwinkel $g'_0 c' g'_u$ beträgt $180^\circ - 2\varphi$, also schließen die Gleitflächen mit den Hauptrichtungen $r_2 x$ und $r_2 z$ der Hauptnormalspannungen σ_x und σ_z die Winkel $45^\circ + \varphi/2$ und $45^\circ - \varphi/2$ ein (I. **119**, S. 374).

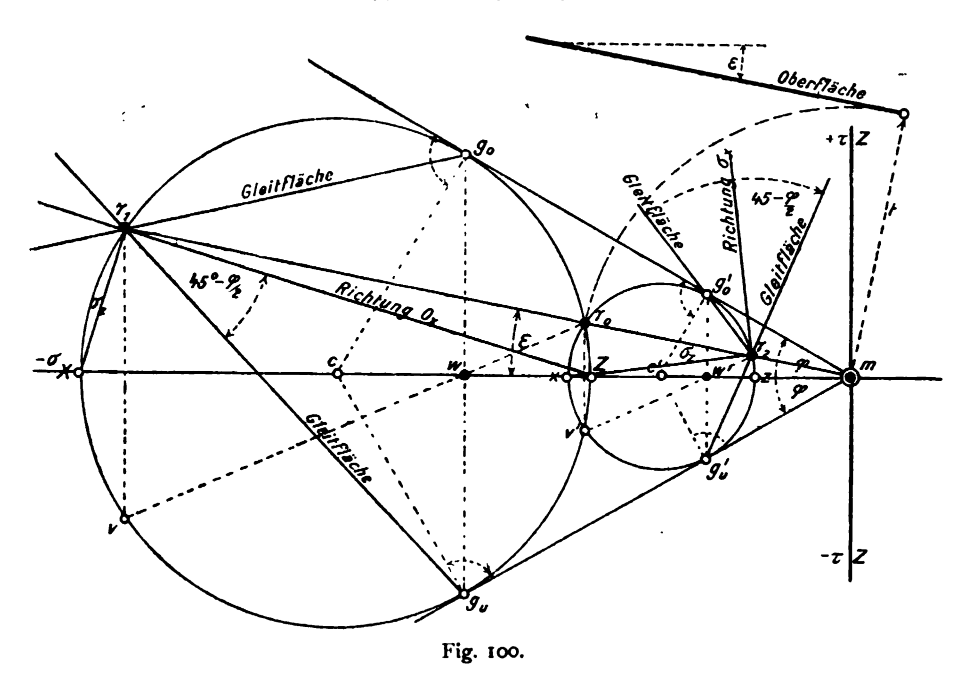


Fig. 100.

b. Der große Hauptkreis. Im großen Hauptkreise erreicht die Normalspannung σ ihren Größtwert durch die Strecke $\overline{mX}$ in dem nach der Geraden $r_1 X$ gerichteten Flächenelemente des Körperpunktes m. Beim Überschreiten dieser Grenze von σ wird das Gleichgewicht gestört, weil die Erdteilchen in den beiden (einander zugeordneten) Gleitflächen $r_1 g_0$ und $r_1 g_u$ des Körperpunktes sich infolge der darin zu groß werdenden Schubspannungen gegeneinander verschieben. Dabei sind $r_1 X$ und $r_1 Z$ die Hauptrichtungen σ_z und σ_x, und die genannten Gleitflächen halbieren die zwischen jenen Richtungen bestehenden Winkel.

c. Die Gleitflächen. Für eine ebene Erdoberfläche sind die Grenzzustände der Spannungen aller Körperpunkte geometrisch ähnlich. Dashalb sind die Hauptrichtungen überall die gleichen, und danach läßt sich folgender Satz aussprechen:

Ein gleichartiger, schubfestigkeitsloser Erdkörper mit ebener Oberfläche besitzt ebene Gleitflächen. Eine Störung des Gleichgewichtes beginnt mit dem Verschieben der Erdteilchen in zwei einander parallelen Scharen jener Gleitflächen.

31. Bestimmung der Spannungsgrößen der Grenzzustände.

a. Für eine geneigte Erdoberfläche. Die gesuchten Werte sind unmittelbar aus der graphischen Darstellung der Fig. 100 zu ermitteln. Man erhält

$$\frac{\overline{cg_0}}{\overline{cm}} = \frac{\overline{c'g'_0}}{\overline{c'm}} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sigma_x + \sigma_z} = \sin\varphi .$$

Für jeden der beiden Grenzzustände folgt

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_x} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = tg^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{61}$$

$$\overline{mx} : \overline{mc'} : \overline{mz} = \overline{mX} : \overline{mc} : \overline{mZ} = (1 + \sin\varphi) : 1 : (1 - \sin\varphi).$$

Ferner

$$\overline{mr_2} + \overline{mr_0} = \overline{2mc'} \cdot \cos\varepsilon$$

$$\overline{mr_2} \cdot \overline{mr_0} = \overline{mc^2} \cdot \cos^2\varphi .$$

Daraus erhält man

für den großen Kreis: $\overline{mr_0} = t = \overline{mc'}\,(\cos\varepsilon + \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi})$

- - kleinen - : $\overline{mr_0} = t = \overline{mc}\,(\cos\varepsilon - \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi})$

und schließlich die *Hauptnormalspannungen*:

für den kleinen Kreis: $\sigma_x = \overline{mx} = -\dfrac{t(1 + \sin\varphi)}{\cos\varepsilon + \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi}}$

$$\sigma_z = mz = -\frac{t(1 - \sin\varphi)}{\cos\varepsilon + \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi}} \tag{62}$$

- - großen - : $\sigma_x = mX = -\dfrac{t(1 + \sin\varphi)}{\cos\varepsilon - \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi}}$

$$\sigma^z = \overline{mZ} = -\frac{t(1 - \sin\varphi)}{\cos\varepsilon - \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi}} \tag{63}$$

b. Sonderfälle.

1. Für eine *wagerechte Erdoberfläche* ist $\varepsilon = o$. Dann folgt (Fig. 101)

für den kleinen Kreis: $\sigma_x = -t;\quad \sigma_z = -t\,\mathrm{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{\varphi}{2}\right)$ (64)

- - großen - : $\sigma_z = -t;\quad \sigma_x = -t\,\mathrm{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{\varphi}{2}\right).$ (65)

Diese Ergebnisse sind auch unmittelbar aus der Fig. 101 zu entnehmen.

2. Wenn die Neigung der Erdoberfläche mit der Wagerechten den Böschungswinkel φ einschließt, ist ε gleich φ, und wie die Fig. 102 veranschaulicht, *fallen dann beide Hauptkreise zusammen*, d. h. jeder Punkt des Erdkörpers befindet sich in dem einzig möglichen Spannungszustande. Alle Festpunkte (r_0, r_1 und r_2) fallen in r_0 zusammen. Die Hauptrichtungen schließen mit den Lotrechten die Winkel $45^\circ + \varphi/2$ und $45^\circ - \varphi/2$ ein. Die eine Gleitfläche steht lotrecht, die andere läuft parallel zur Erdoberfläche. Die Hauptspannungen betragen:

$$\sigma_x = -\frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\sigma_z = -\frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi}. \tag{66}$$

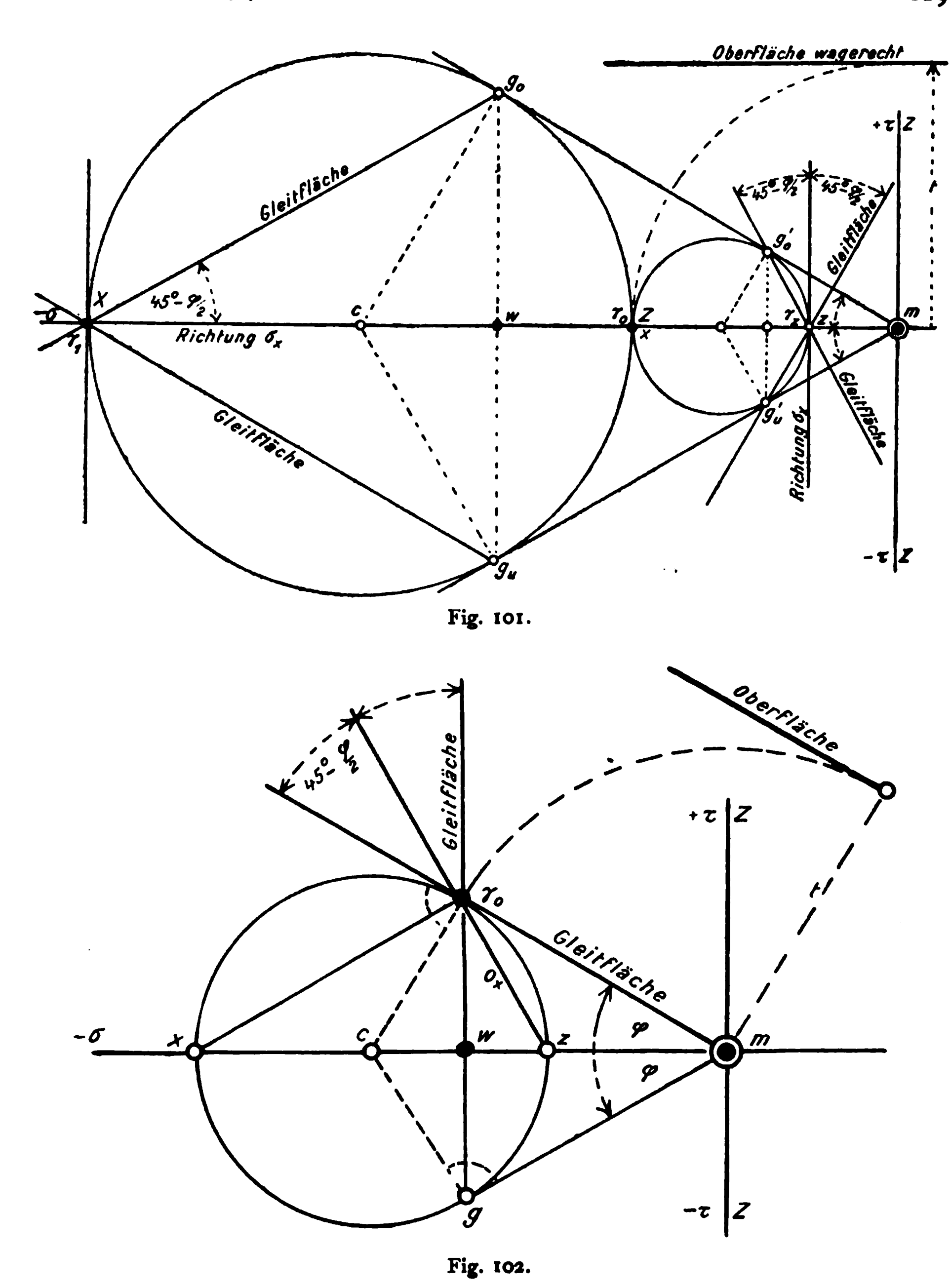


Fig. 101.

Fig. 102.

32. Anwendungen der Theorie nach Mohr.

a. Veranschaulichung der Hauptrichtungen der Normaldrücke durch Flüssigkeitssäulen (Fig. 103).

1. Nach Vorigem behalten die Hauptrichtungen für σ_x und σ_z in jedem beliebigen Punkte des Erdkörpers unverändert ihre einmal festgestellte Lage. MOHR

betrachtet demnach die beiden in den Hauptrichtungen liegenden unendlich schmalen *Erd*prismen *ma* und *mb* der Fig. 103 in ihrem Zusammenwirken als ein außen und innen glattes Knierohr, in welchem eine zähe Flüssigkeit (von den vorausgesetzten natürlichen Eigenschaften des Erdreiches) bis zur Erdoberfläche eingefüllt ist. Die glatten Wände übertragen also auf die Flüssigkeit nur Normaldrücke, nicht aber Reibungswiderstände, und die Normaldrücke σ_x und σ_z können durch die *hydrostatischen Druckhöhen* der betreffenden Rohrzweige gemessen werden. σ_z in der *mb* ist in Verbindung *mit der inneren Reibung der zähen Flüssigkeitssäule mb* gerade groß genug, um eine Störung des Gleichgewichtes durch die Flüssigkeitssäule *ma* zu verhindern. Eine *äußere* Reibung an den glatten Rohrwänden kommt hierbei nicht in Betracht.

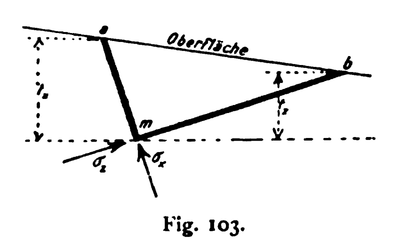


Fig. 103.

Ein Kleinerwerden des Druckes σ_z, ebenso auch der durch den Böschungswinkel bestimmten inneren Reibung würde eine Gleichgewichtsstörung zur Folge haben. Anderseits würde diese Störung auch durch eine Vergrößerung des Druckes σ_x herbeigeführt werden. Danach spielt hier σ_x die Rolle des *tätigen* Erddruckes, dem σ_z einen *ruhenden* Widerstand entgegensetzt. Das Verhältnis der beiden Normaldrücke ergibt sich aus dem Vergleiche der Druckhöhen t_x und t_z der Fig. 103, ist also nach Gl. (66) mit

$$\sigma_x : \sigma_z = t_x : t_z = (1 + \sin\varphi) : (1 - \sin\varphi) \qquad (67)$$

anzuschreiben.

2. Die *Hauptrichtungen* der beiden Normaldrücke können nach Obigem wie folgt dargestellt werden (Fig. 104): Man zeichnet einen beliebig großen Hauptkreis und darin einen Durchmesser *acb* parallel zur gegebenen Erdoberfläche. Den Zentriwinkel *bcr* macht man gleich $90^\circ - \varphi$ und legt in *r* eine Tangente an den Kreis, durch welche die Oberfläche in *h* geschnitten wird. Schneidet dann eine durch *h* gelegte Wagerechte den Kreis in den Punkten m_u und m_o, so sind die Geraden $m_o a$ und $m_o b$ die Hauptrichtungen für den *unteren*, sowie die Geraden $m_u b$ und $m_u a$ für den oberen Grenzzustand, denn nach der Gl. (66) ist jetzt

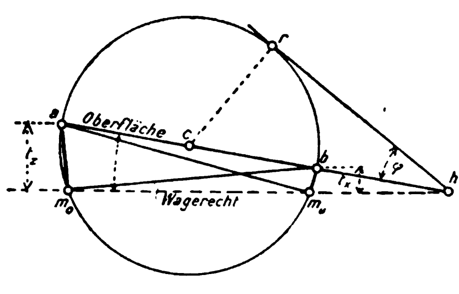


Fig. 104.

$$\overline{ha} : \overline{hb} = t_x : t_z = (1 + \sin\varphi) : (1 - \sin\varphi),$$

und das gilt *für jeden beliebigen Punkt m* des freien Erdreiches.

b. Schwierigkeiten bei der Anwendung der Theorie zur Berechnung von Stützmauern.

Eine allgemeine und unbedingte Anwendung ist nicht möglich. *Jedoch ist die Theorie in allen solchen Fällen anwendbar, wo die Hauptrichtungen der Normal-*

drucke σ_x *von jedem Punkte der Hinterwand der Stützmauer, ungehindert durch dazwischen tretende Mauerteile, bis zur Erdoberfläche durchgeführt werden können.* Das ist in der Fig. 105 der Fall, aber nicht in der Fig. (106).

In der Fig. 105 können danach die Spannungszustände in den Punkten m und n einer zur Erdoberfläche parallel gestellten Ebene nach der Theorie von MOHR dargestellt werden. In beiden Punkten ermittelt man σ_x aus dem hydrostatischen Flüssigkeitsdrucke $\gamma_e t$, und im Punkte n ist die Mauer im Stande den ruhenden Widerstand zu leisten, der eine Gleichgewichtsstörung durch die Wirkung der Normaldrucke σ_x verhindert, absichtliche Störungen natürlich ausgeschlossen. Solche könnten durch besondere Lagerung der Schichten beim Hinterfüllen der Mauer, oder durch Stampfen der Erde in ihrer Nähe herbeigeführt werden.

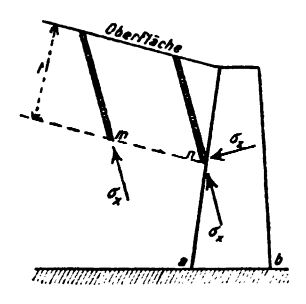



Fig. 105.

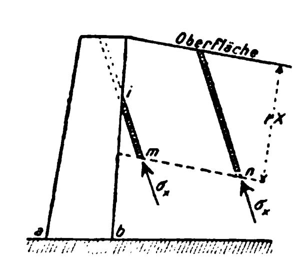


Fig. 106.

In der Fig. 106 wird die Gleichartigkeit der Spannungszustände gestört, weil von der Sohle ab der Mauer keine der Hauptrichtungen von σ_x bis zur Erdoberfläche ungehindert durchlaufen kann. Daß der Druck der Mauer oberhalb des Wandpunktes i die Wirkung der bis zur Oberfläche fehlenden Erdschicht ersetzen könne, darf nicht angenommen werden, weil dies den gemachten Voraussetzungen widerspricht. Jedenfalls weichen die Spannungszustände in den Punkten m und n hier voneinander ab. Die Ermittelung des Erddruckes gegen die Wand bleibt daher eine statisch unbestimmte Aufgabe, die aus den eingangs (**27**) angedeuteten Gründen bis heute nicht gelöst worden ist.

c. Beispiel für eine ebene Stützmauerwand (Fig. 107).

Es kann hier nur der *tätige* Erddruck in Frage kommen, d. h. der *untere* Grenzzustand des Gleichgewichtes (mit dem kleinsten σ_x) ist maßgebend.

Es genügt, die Hauptrichtung von σ_x für den unteren Wandpunkt i zu bestimmen (Fig. 107). Mit dem senkrechten Abstande t zwischen i und der Erdoberfläche ist ein Kreisbogen zu schlagen. Er trifft die durch i gehende Parallele zur Oberfläche im Festpunkte r_0. Der Hauptkreis ist jetzt durch die Bedingung gegeben, daß sein Mittel e auf der Wagerechten iX liegen, und daß ihn die unter dem Winkel φ dazu gezeichnete Grenzlinie des unteren Spannungszustandes in g_u berühren muß. Wenn danach der Hauptkreis gezeichnet wird, so schneidet er die Gerade ir_0 im Punkt r_1, die Wagerechten in den Punkten x und z. Die Haupt-

richtung σ_x ist damit durch die Gerade $r_1 z$ gegeben. Ihre Parallelen schneiden in keinem ihrer Punkte die Mauer zwischen i und b. Die Theorie von MOHR ist hier also anwendbar.

Man ziehe jetzt durch r_1 zur Wandlinie ib eine Parallele; schneidet diese den Kreis in s, so stellt die Strecke $\overline{si}$ die Spannung ϱ im Punkte i dar. Deren Richtung erhält man (nach **29**, Fig. 99) durch den Festpunkt w, indem man durch s und w eine Sehne su legt. Die Gerade ur_1 bestimmt sodann die Richtung von ϱ. Parallel dazu verläuft durch den unteren Punkt des unteren Drittels (nach

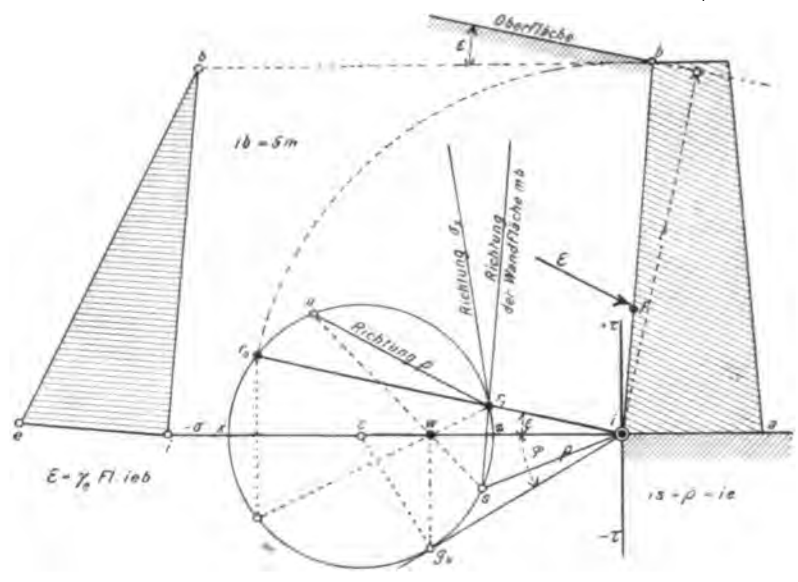


Fig. 107.

24, a, 1) die Mittelkraft E aller Drucke ϱ. Trägt man somit ϱ (in bekannter Weise) in i als Strecke $\overline{ie}$ auf (Fig. 107 links), so erhält man

$$E = \gamma_e \cdot \frac{\overline{ib} \cdot \overline{ie}}{2}.$$

Wenn zufällig die Hauptrichtung σ_x mit der Wandlinienrichtung zusammen fiele, *so stände E senkrecht dazu.*

Der Maßstab der Strecken in der Fig. 107 ist 1:100 der natürlichen Größe. Danach erhält man

$$\overline{ib} = 5\text{ m}; \quad ie = 2\text{ m}$$

und ist das Raumgewicht γ_e der Erde gleich 1,8 t/m³, so gibt das

$$E = \frac{1{,}8 \cdot 5 \cdot 2}{2} = 0{,}9\text{ t}.$$

Damit sind die *Fugenspannungen* der Mauer und die der *Bodendrücke* (nach **26**) gegeben.

Wäre die Hinterwand nicht *eben* gewesen, sondern *gebrochen* (**26**, a) so würde man für *jeden mit ebener Hinterwand versehenen Teil* der Mauer, und mit dem oberen Teile anfangend, die Erddrücke E_1, E_2, E_3 usw. und ihre Angriffspunkte bestimmen können, so wie es in den Nummern **24**, c und **26** gezeigt worden ist.

d. Beispiel einer angenäherten Bestimmung von E, bei Unterbrechung der Hauptrichtung durch die Wandfläche (Fig. 108).

1. Nachdem der mit t geschlagene Kreis, die Böschungslinie if, die Parallele zur Erdlinie durch i gezeichnet worden sind, ist der Hauptkreis mit den Punkten

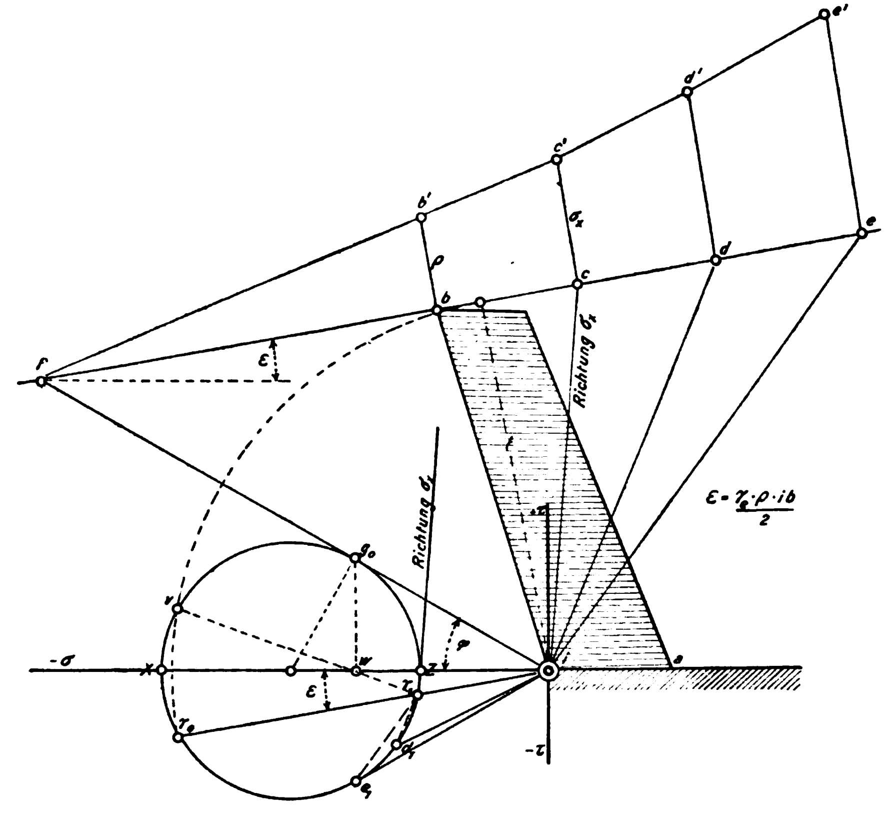


Fig. 108.

r_0, r, x und z gegeben, und damit die Hauptrichtung σ_x parallel zur Sehne $r_1 z$, bestimmt. Man lege jetzt durch f eine Linie fe, durch welche die *Abhängigkeit der Spannungsgröße* ϱ *des Punktes* i *von der Lage der Wandlinie* dargestellt wird. Denkt man sich die Wandlinie ib mit der Böschungslinie if zusammenfallen, so wird ϱ gleich Null. Läge $\overline{ib}$ in der Hauptrichtung ic, so bestimmte sich die Spannung ϱ aus der Strecke $\overline{iz} = \overline{cc'}$. Zieht man dann noch zu den Richtungen id und ie die parallelen Sehnen im Hauptkreise, so erhält man dadurch

$$\overline{id_1} = \overline{dd'};\ \overline{ie_1} = \overline{ee'}.$$

Die erhaltene Linie $fc'd'e'$ ist nach unten schwach gekrümmt. Setzt man für die krumme Strecke fc' angenähert die Gerade fc', so ist damit die Spannung im Punkte i der Wandlinie ib gegeben. Es ist

$$\varrho = \overline{bb'}$$

$$E = \frac{\gamma_e \cdot ib \cdot bb'}{2}.$$

In praktischen Fällen ist der Winkel cib sehr klein; wäre er Null, so fiele die Hauptrichtung mit der Richtung der Wandlinie zusammen und E stände senkrecht dazu (**32**, c).

2. Weitere Beispiele, in denen Wand- und Erdlinie nicht gerade sind, und Überlasten vorkommen, lassen sich nach den (unter **18**—**23**) gegebenen Anweisungen auch hier ohne große Schwierigkeiten auf den *Grundfall* zurückführen.

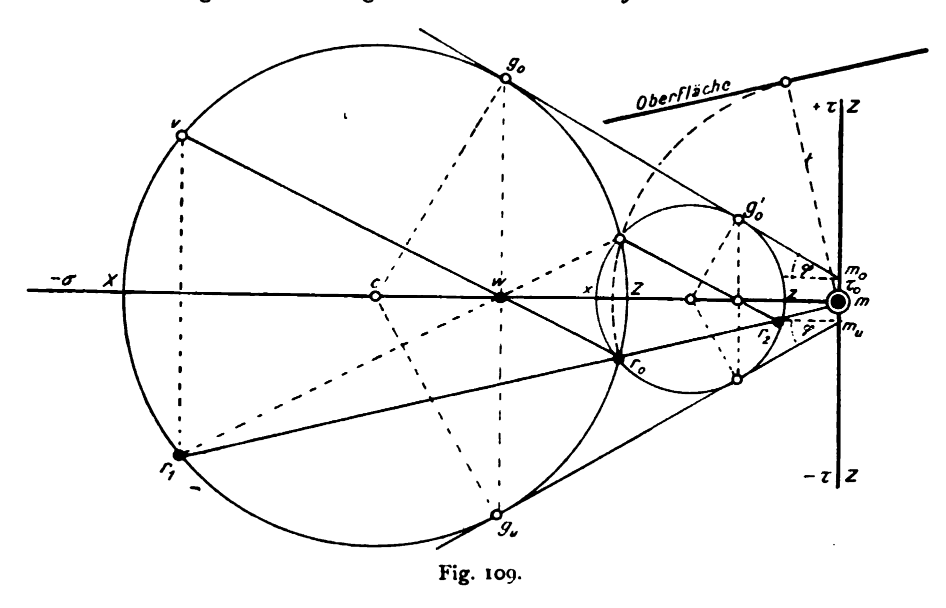


Fig. 109.

e. Berücksichtigung der Schubfestigkeit des Erdreiches.

1. Schon Poncelet berücksichtigte nur den Einfluß der Reibung auf die Grenzzustände des Gleichgewichtes, nicht aber den Einfluß der Schubfestigkeit des Erdreiches, weil er annahm, daß der Reibungswiderstand erst anfange tätig zu wirken, nachdem die Schubfestigkeit überwunden sei. Wenn das richtig wäre, würde erst nach erfolgter Überschreitung der Schubfestigkeitsgrenze des Erdreiches die Reibung zur Wirkung kommen. Wollte man danach die Grenzlinien, innerhalb welcher die Hauptkreise bleiben müssen, auftragen, so wäre das in jedem Falle leicht auszuführen. Mohr hält es jedoch für wahrscheinlicher, daß der Grenzwert der Schubspannung mit dem Normaldruck der Gleitflächen *stetig* wächst. Danach müßten die Grenzlinien allgemein die in der Fig. 109 angedeutete Gestalt erhalten. Angenähert setzt Mohr dafür die beiden Geraden der Gleichung

$$\tau_{max} = \pm (\tau_o - \sigma \operatorname{tg} \varphi) \qquad (68)$$

worin τ_0 (die Schubfestigkeit) und φ (der Reibungswinkel) Größen vorstellen, die durch Versuche mit verschiedenen *gleichartigen* Erdsorten festzustellen sein werden.

2. Die Darstellung der zugehörigen Grenzzustände erfolgt, abgesehen von der veränderten Gestalt der Grenzlinien, vollständig so, wie unter alleiniger Betrachtung des Reibungswiderstandes, wie dies die Fig. 109 veranschaulicht. Dann wird auf der τ-Achse

$$\overline{mm_0} = \overline{mm_u} = \tau_0$$

gemacht, und an m_0 und m_u schließen sich zu beiden Seiten die wagerechten σ-Achsen, die geraden Grenzlinien m_0g_0 und m_ug_u für den Einfluß der Reibung. Dabei braucht φ nicht mit dem früheren Reibungswinkel identisch zu sein, wenn etwa entsprechende Versuche dies ergeben sollten. Die Punkte r_0, r_0'; g_0, g_0'; w, w'; r_0', r_0''; X, Z, x, z usw. bedeuten dasselbe, wie dies früher der Fall war (Fig. 100).

Nur ein einziger Unterschied gegenüber den früheren Darstellungen ist zu beachten: Weil die Strecken von τ_0 von *unveränderlicher Größe* sind, so sind die Spannungen ϱ im *nicht*schubfestigkeitsfreien Erdkörper den Abständen t, zwischen dem Punkte m und der Erdoberfläche nicht, wie früher, proportional. Um daher den Erddruck E nach Größe und Lage zu bestimmen, müssen die Werte von ϱ für eine ausreichende Zahl von Punkten in der Wandlinie ermittelt werden. Auch ändern mit dem Maße t die *Gleitflächen* eines Grenzzustandes ihre Stellungen, es sei denn, daß die Erdlinie eine Wagerechte wäre.

Dritter Abschnitt.

§ 5. Anhang.

In meinen Vorträgen und Übungen verteile ich Umdruckhefte, in denen die wichtigsten Unterlagen für die Berechnung von Bauwerken, wie Angaben über Gewichte, Belastungen, Grundmaße u. dgl. enthalten sind. Die folgenden Zusammenstellungen sind dem neuesten Umdrucke solcher Art entnommen. Die darin gemachten Angaben beziehen sich hauptsächlich auf *Gewölbe* und *Stützmauern*. Aber auch in der 2. Hälfte des vorliegenden 2. Bandes bei der Behandlung der statisch unbestimmten Systeme beziehe ich mich darauf.

33. **Eigengewichte und veränderliche Belastungen der gewölbten Steinbrücken.**

a. Eigengewichte.

1. Es empfiehlt sich, das Eigengewicht aus einem *Vorentwurfe* zu berechnen, wobei die Belastungshöhe im Scheitel (q_0), die Gestalt der inneren Wölblinie, das Gefälle der Fahrbahn, sowie die Gewölbestärken und Raumgewichte der Baustoffe zu berücksichtigen sind. Auch die *Bauhöhe* — das ist der Abstand zwischen der Fahrbahnhöhe und der Höhenlage des zu überwölbenden Verkehrsweges —, sowie auch die *Lichtweite* (l_0) spielen dabei eine Rolle[89].

Die *Raumgewichte*. Für natürliche Bausteine sind diese nach Angaben von FOERSTER aus dem angegebenen Taschenbuch (S. 470 u. f.) zu entnehmen. KÖGLER gibt dort auf S. 983 folgende Zahlen in kg für 1 m³:

Eisenbeton	2400	Ziegelmauerwerk	1800
Klarschlagbeton	2200—2400	Trockener Sand oder Kies	1700
Ziegelbrockenbeton	1800	Nasser Sand oder Kies	bis 2000
Schlackenbeton	1700	Chaussierung, 25 cm stark	500
Bimsbeton	1500	Granitpflaster, 16 - -	430
Stampfasphalt, 5 cm stark	75	Klein- - 12 - -	320
1 m Gleis einer Hauptbahn	200—240	Hartholz - 8 - -	90

2. Für den Wettbewerb um eine Rheinstraßenbrücke in Köln[90] galten folgende Zahlen:

---

[89] Vgl. Dr.-Ing. KÖGLER im Taschenbuch für Bauingenieure S. 981. Julius Springer, Berlin 1911.

[90] Der Eisenbau 1911, S. 407.

Fahrbahn: Hartholzpflaster, 10 cm stark, fertig verlegt und besandet	115 kg/m²
Granitbordsteine, 21 cm breit, 26 cm hoch	145 kg/m
Kiesbeton einschließl. der Feinzementschicht	2250 kg/m³
Gußasphalt für Fahrbahnabdichtung und Fußwege	2250 kg/m³
Fußwege: Bimsbeton einschließl. der Feinzementschicht . . .	1550 kg/m³
2 Gleise für die elektrischen Bahnen	140 kg/m

b. Verkehrslasten für Eisenbahnen.

1. *Haupteisenbahnen.* Die preußische Eisenbahnverwaltung hat folgende Bestimmungen erlassen, die seit 1905 auch für das Deutsche Reich gelten: Es ist ein Zug mit zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit einer unbeschränkten Anzahl von angehängten Güterwagen anzunehmen (Fig. 110).

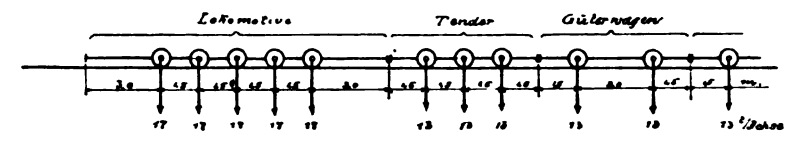


Fig. 110.

Solange weniger als fünf Lokomotivachsen auf der Brücke rollen, sowie auch für die Berechnung der Quer- und Längsträger sind — soweit sich dadurch höhere Beanspruchungen ergeben — in Rechnung zu stellen:

18 t für eine Achse bei Belastung mit	4 Achsen	von	1,5 m	Radstand
19 t - - - - - -	3 -	-	1,5 m	-
20 t - - - - - -	1 oder 2 -	-	1,5 m	-

Für überschlägige und vergleichende Rechnungen, sowie bei den Belastungen von *Steinbrücken* können die Zugeinzellasten (unter Zugrundelegung des preußischen Lastenzuges) durch eine gleichmäßig verteilte Last q in Tonnen wie folgt ersetzt werden:

für Stützweiten von 10— 25 m: $q = 10 + 29/l$
- - - 25— 40 m: $q = 2,74 + 142/l$
- - - 40—200 m: $q = 3,58 + 108/l$.

2. *Nebeneisenbahnen.* Als *Lastenzüge für Nebenbahnen* sind — sofern der Übergang der Fahrzeuge auf die Hauptbahn ausgeschlossen ist — anzunehmen:

Bei Vollspur: *Preußische Vorschrift* (zwei Tenderlokomotiven):

Radstand: 2,183—3,0—2,45—2,35—2,10—1,6—2,62 m
Achsdruck: 13,6—12,15—10,0—10,18—12,8—12,8 t.

Wenn notwendig, sind Hauptbahngüterwagen anzuhängen.

Bei Schmalspur: *Sächsische Vorschrift* (in gleicher Richtung fahrende Tenderlokomotiven):

Radstand: 1,85—1,35—2,95—1,35—1,65 m
Achsdruck: 7,25—7,25—7,25—7,25 t.

Eine Einzellast von 10 t darf in keinem Bauteile höhere, als durch vorstehende Lasten erzeugte Spannungen erzeugen.

3. *Belastungsgleichwerte für Steinbrücken.* TOLKMITT berechnet aus dem *Raumgewichte γ des Gewölbebaustoffes* die Belastungshöhe über einer wagerechten Belastungslinie wie folgt:

Verkehrszweck der Brücke	Spannweite l in t/m	Belastungshöhe bei $\gamma = 1,8$	Belastungshöhe bei $\gamma = 2,3$
	m	m	m
Hauptbahnen mit 8,5 t größtem Raddruck	unter 18,0	1,50	1,20
	18,0 bis 36,0	1,35	1,02
	über 36,0	1,10	0,85
wie vor mit 7,0 t größtem Raddruck	unter 12,0	1,40	1,10
	12,0 bis 24,0	1,20	0,94
	über 24,0	0,90	0,70
Nebenbahnen	unter 10,0	1,00	0,78
	10,0 bis 20,0	0,82	0,64
	über 20,0	0,64	0,50

c. Wagenlasten für Straßenbrücken. Man unterscheidet *Hauptstraßen*, *Nebenstraßen* und *Feldwege* od. dgl. Fußsteige sind allein für *Menschengedränge* zu berechnen. Für alle übrigen Überbauarten müßte im allgemeinen untersucht werden, welche der möglichen, regelmäßig wiederkehrenden Belastungen für die betrachteten Überbauteile die gefährlichsten sind.

Einige Verwaltungen berücksichtigen außer der Belastung von Fuhrwerken verschiedener Art auch noch eine *Schnee*belastung (von etwa 75 kg/m²).

1. *Walzen* (Fig. 111): Chausseewalze: Gewicht 6,0 t.
Dampfwalze: Vorderwalze 10,0 t,
Hinterwalze $2 \cdot 6,5 = 13,0$ t.

2. Einfache *Fuhrwerke* (Fig. 112):

	a_1	a_2	l	c	d	e	b	s	R	P_1	P_2
Leichtes Fuhrwerk	1,0	2,6	4,6	2,6	—	1,3	2,0	1,4	3 t	0,6 t	—
Mittelschweres -	2,0	3,5	7,5	4,0	3,0	1,3	2,3	1,5	6 t	0,6 t	0,6 t
Schweres -	2,0	4,5	8,5	4,0	3,0	1,3	2,5	1,5	10 t	0,6 t	0,6 t

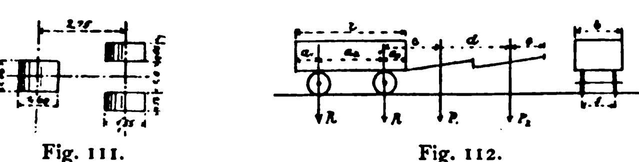


Fig. 111. Fig. 112.

3. Beim Wettbewerb für eine Kölner Rheinstraßenbrücke waren vorgeschrieben: *Wagen der elektrischen Bahn* (Fig. 113),

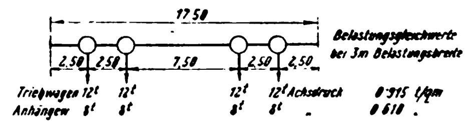


Fig. 113.

Lastfuhrwerke (Fig. 114),

a) sehr schwere Wagen von 20 t Gewicht,

b) mittelschwere Wagen von 10 t Gewicht, Ladebreite 2,30 m und ein von jeder andern Belastung frei zu haltender Laststreifen von 2,50 m Breite;

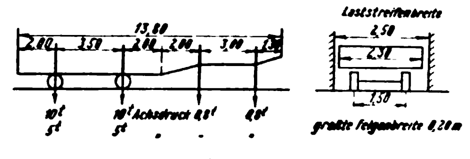


Fig. 114.

Dampfstraßenwalze von 23 t Gewicht (Abb. 115).

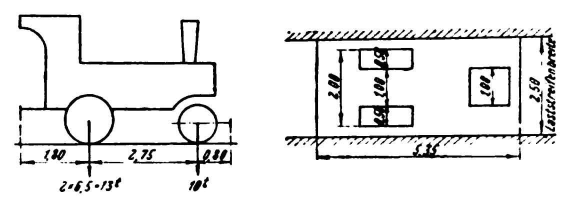


Fig. 115.

4. Kögler macht im Taschenbuch für Bauingenieure (S. 984) noch folgende Angaben über *Kesselwagen* (Fig. 116):

Bauart	$2V = 2H$	L	B	a	s	b	Bespannung der Wagen		
							Pferde		Länge
							Zahl	Gesamtgewicht t	
	t	m	m	m	m	m			m
Schwerste	25,00	12	2,75	5,00	2,26	0,23	14	8,1	22,5
Mittelschwere	15,25	8,85	2,0	4,85	1,84	0,20	8	4,8	13,0
Leichte	12,00	8,0	2,3	4,00	1,80	0,20	6	3,3	9,5

Der von den Fahrzeugen und ihrer Bespannung nicht besetzte Teil der Fahrbahn ist mit *Menschengedränge* belastet anzunehmen (S. 140).

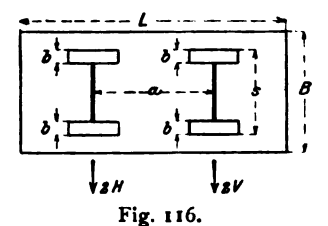


Fig. 116.

5. *Belastungen durch Pferde-, Dampf- und elektrische Straßenbahnen.*

	Wagengewicht	Dienstgewicht	Radstand
Pferdebahnwagen: Einspänner	1650 kg	3100 kg	1,54 m
Zweispänner mit Decksitzen	2800 kg	5600 kg	1,83 m
Dampfbahnlokomotive	—	8—22 000 kg	1,50—1,80 m
Elektrische Bahnwagen: Motorwagen . . .	6—8000 kg	7500—9500 kg	—
(schwerste Akkumulatorwagen)	10 000 kg	12 000 kg	1,80 m
Anhänger	2500—3500 kg	4—5000 kg	—
(schwerste)	5000 kg	7000 kg	1,80 m

d. Menschengedränge.

1. Für Brücken auf dem Lande . . . 300 kg/m².
- - in Städten . . . . 500 - . Im Mittel 400 kg/m².
- Berechnungen von Fußwegen . 560 - .

In neuester Zeit ist in Amerika festgestellt worden (Zentralbl. d. Bauverw. 1904), daß die Belastung durch Menschengedränge über 700 kg/m² steigen kann. Es erscheint aber unwirtschaftlich, solche außergewöhnlich hohe Belastungen der Berechnung zugrunde zu legen. Unbedenklich darf man, bei zweckmäßiger Annahme der zulässigen Spannung, die *im regelmäßigen Betriebe* der Brücke wiederkehrenden größten Lasten in die Rechnung einführen (*was auch* — wie bereits gesagt — *für Eisenbahnen gelten sollte*).

2. *Verschiedene Vorschriften über Größe von Menschengedränge.*

	Name der Verwaltung	Herausgabe der Vorschrift	Menschengedränge in kg/m²			
			Hauptträger der Brücken			Fußwege
			I. Klasse	II. Klasse	III. Klasse	
1.	Österreichisches Handelsministerium	1887	460	400	340	—
2.	Schweizer Bundesrat	1892	450	350	250	—
3.	Sächsische Staatseisenbahnen	1895	400	400	400	560
4.	Preußische -	1899	400	400	400	400
5.	Bayerische -	1900	360	360	360	560

Daß man in neuerer Zeit *Fußwege* der Straßenbrücken so hoch belastet annimmt, erscheint berechtigt, wenn es sich um solche Brücken I. Klasse handelt, die im Zuge des internationalen oder eines besonders lebhaften Ortsverkehrs liegen, wie große Strombrücken, Hafenbrücken u. dgl., von deren Fußwegen aus die Menge freie Ausblicke auf allerlei sehenswerte Vorgänge des öffentlichen Lebens, sowie auch auf Naturschauspiele usw. haben kann.

3. Die *Geländer der Fußwege* sind gegen Brechen zu schützen. Deshalb wird gewöhnlich vorgeschrieben, daß sie für eine am Holm angreifende wagerechte Kraft von 75—120 kg sicher genug sein müssen.

e. Winddruck und Temperatureinflüsse.

1. *Winddruck*: 250 kg/m² auf die unbelastete; 150 kg/m² auf die verkehrsbelastete Brücke und auf ein — die Wandflächen der Fahrzeuge ersetzendes — durchlaufendes *Verkehrsband*, das für Eisenbahnen 3,0 m und für Straßen zu etwa 2,5 m Höhe über Fahrbahnoberkante anzunehmen ist.

2. *Temperaturgrade.* Steingewölbe nehmen die Luftwärme nur sehr langsam an, deshalb genügt es, eine Änderung der Temperatur von etwa ± 15° über oder unter der mittleren Luftwärme von + 10° C. zu berechnen (**7**, c).

34. Grundmaße bestehender gewölbter Brücken.

a. Baustoff, Abmessungen und Fugendrücke.

Tabelle 1. Eisenbahnbrücken.

Bauwerk:	Baustoff	Spannw. l(m)	Pfeil f(m)	$\frac{f}{l}$	Scheitelstärke d_c	r*)	$\frac{d_c}{l}$	Kämpferstärke	Größter Fugendruck	Bemerkungen
Pruth-Br. bei Jaremcze.	Sandstein	65	17,9	1 : 3,64	2,1	38,45	1 : 31	3,1	27,5	In 3 Ringen gewölbt.
Gutach-Br.	Bruchstein	64	16,1	1 : 3,98	2,0	39,851	1 : 32	2,8	35,19	dgl. (Vogesen-Sandst.)
Br. bei Gour-Noir	Granit	62	16,1	1 : 3,85	1,70	36,0	1 : 36	4,20	30,4	dgl. (St. roh bearb.)
Lavaur-Br.	Bruchstein	61,5	27,5	1 : 2,24	1,65	31,2	1 : 37	2,81	23	dgl.
Mulden-Br. bei Göhren, Sachsen . .	Granulit	60	6,75	1 : 8,89	1,10	—	1 : 55	1,20	36	Dreigelenkbogen. Bruchst. Größte Wölbstärke 1,50 m.
Schwändelholz-Br.	Vogesen-Sdst.	57	14,25	1 : 4	1,80	35,625	1 : 32	2,60	34,54	In 3 Ringen gewölbt.
Antoinette-Br..	Bruchst.	50	15,9	1 : 3,14	1,50	31,0	1 : 33	2,28	30	dgl.
Tal-Br. von Nogent üb. d. Marne . .	dgl.	50	25,0	1 : 2	1,80	25,0	1 : 28	4,50	—	—
Pruth-Br. bei Jamna	Sandstein	48	11,4	1 : 4,21	1,70	—	1 : 28	2,60	25,1	In Ringen gewölbt.
Br. ü. d. Ariège b. Castelet	Bruchstein	41,2	14,0	1 : 2,94	1,25	—	1 : 33	2,25	20	dgl.
I. Pruth-Br. b. Worochta.	Sandstein	40	10,0	1 : 4	1,40	—	1 : 29	2,20	21,4	dgl.
Tal-Br. von Ville franche	—	39,36	17,0	1 : 2,32	1,40	—	1 : 28	2,00	20	—
Main-Br. bei Kitzingen	Bruchstein	36,5	7,3	1 : 5	1,00	—	1 : 37	—	25,2	—
II. Pruth-Br. b. Worochta	dgl.	34,6	17,8	1 : 1,94	1,30	17,3	1 : 27	2,10	17,6	In Ringen gewölbt.
E.-B.-Br. über die Elbe in Dresden .	Beton	31,0	—	—	1,10	—	1 : 28	1,30	—	Dreigelenkbogen.
Wertach-Br. b. Nesselwang.	Bruchstein	27,5	—	—	0,80	—	1 : 34	—	18,4	—

*) Krümmungshalbmesser der inneren Wölblinie im Scheitel.

Tabelle 2. Straßenbrücken.

Bauwerk:	Baustoff	Spannw. l(m)	Pfeil f(m)	$\frac{f}{l}$	Scheitelstärke d_c	ϱ	$\frac{d_c}{l}$	Kämpferstärke	Größter Fugendruck	Bemerkungen
Br. ü. d. Syratal b. Plauen i. V.	Bruchstein	90,0	18,0	1:5	1,80	66,0	1:50	4,00	49,5	
Br. ü. d. Petrussetal b. Luxemburg	dgl.	72,0	16,20	1:4,44	1,44	55,0	1:50	2,16	—	In 3 Ringen gewölbt.
Prinz-Regenten-Br. i. München	Muschelkalk	64,0	6,40	1:10	1,00	—	1:64	1,25	45	Quadergew.-3 Stahlgel.
Grosvenor-Br. (Engl.)	Quader	60,96	12,80	1:4,76	1,22	42,61	1:50	1,83	—	—
Max-Josef-Br. i. München	Muschelkalk	60,0	6,0	1:10	1,00	—	1:60	1,25	45	Quadergew.-3 Stahlgel.
Hannibal-Br. ü. d. Volturno	Ziegel	55,0	14,02	1:3,92	2,0	57,0	1:28	5,0	—	Korbbogen
Teufels-Br. b. Barizzo	dgl.	55,0	13,35	1:4,06	2,0	57,2	1:28	3,5	—	dgl.
Dracbr. b. Claix (Frankr.)	Bruchstein	52,0	8,05	1:6,46	1,50	46,0	1:35	3,10	—	—
Neckarbr. i. Neckarhausen	Beton	50,82	4,62	1:11	0,85	—	1:60	0,90	39,8	Dreigelenkbogen.
Donau-Br. i. Munderkingen	dgl.	50,0	5,0	1:10	1,00	70,0	1:50	1,10	38	dgl.
Nalontal-Br. (Asturin)	dgl.	50,0	4,5	1:11,11	1,10	—	1:45	1,10	40,53	dgl.
Donau-Br. i. Inzigkofen	dgl.	43,0	4,46	1:9,64	0,70	—	1:61	0,80	36,5	dgl.
Coulouvrenière-Br. i. Genf	dgl.	40,0	5,55	1:7,21	1,00	—	1:40	1,20	20,0	dgl.
Boucicaut-Br. ü. d. Saône	Quader	40,0	5,0	1:8	1,05	—	1:38	1,24	19,9	—
Br. ü. d. Saône b. Charrey	Bruchstein	30,5	3,75	1:8,13	1,50	—	1:20	—	12,1	—
Oder-Br. in Frankfurt	Ziegel	30,0	3,75	1:8	0,80	—	1:38	1,29	—	—
Enz-Br. bei Höfen	Quader	28,0	2,8	1:10	1,0	—	1:28	1,50	24,0	Dreigelenkbogen.
Forbach-Br. i. Baiersbronn	dgl.	25,0	3,0	1:8,33	0,60	—	1:42	0,80	56,4	dgl.
Herkules-Br. i. Berlin	Sandstein	23,36	3,30	1:7,08	0,85	—	1:27	1,16	40,0	Quadergewölbe.
Kaiser-Wilhelm-Br. i. Berlin	Granit	22,24	4,0	1:5,56	0,80	—	1:28	1,50	60,0	dgl.
Oberbaum-Br. i. Berlin	Klinker i. Zem.	22,0	3,41	1:6,45	0,77	—	1:29	1,03	24,0	—
Waisenbr. in Berlin	dgl.	20,0	3,40	1:5,88	0,51	—	1:39	1,60	24,0	—
Spreebr. in Cöpenick	dgl.	18,0	3,40	1:5,29	0,64	—	1:28	0,90	11,4	Zement 1:3
Lange Br. in Potsdam	dgl.	18,0	4,60	1:3,91	0,64	—	1:28	1,50	12,7	—
Moltke-Br. in Berlin	dgl.	17,46	3,50	1:5	0,90	—	1:19	1,30	24,0	- 1:3
Friedrich-Br. in Berlin	dgl.	17,0	2,88	1:5,90	0,51	—	1:33	0,90	24,0	- 1:3
Luther-Br. in Berlin	dgl.	17,0	3,43	1:4,96	0,64	—	1:27	1,03	24,0	- 1:3

b. Erfahrungswerte für die Scheitelstärke d_c:

1. Nach den Tabellen 1 und 2 liegt das Verhältnis d_c/l zwischen $^1/_{19}$ und $^1/_{64}$, und im besondern erhält man daraus

für *Eisenbahn*brücken: $d_c = {}^1/_{28}$ bis $^1/_{55}$
- *Straßen* - : $d_c = {}^1/_{19}$ bis $^1/_{64}$.

2. Wenn r den *Krümmungshalbmesser* der inneren Wölblinie im Scheitel bedeutet, und h die *Schnitthöhe* über dem Gewölbescheitel, so rechneten

PERRONET: Für Bögen aus Haustein: $d_c = 0{,}33 + 0{,}035\, l$.
RANKINE: - - - - $d_c = 0{,}191 \sqrt{3}$.
HEINZERLING: bei $h < 1{,}50$ m bei $h > 1{,}50$ m.
Haustein: $d_c = 0{,}39 + 0{,}025 \cdot r$ $d_c = 0{,}45 + 0{,}030 \cdot r$
Ziegeln: $d_c = 0{,}43 + 0{,}028 \cdot r$ $d_c = 0{,}51 + 0{,}033 \cdot r$
Bruchstein: $d_c = 0{,}48 + 0{,}031 \cdot r$ $d_c = 0{,}55 + 0{,}037 \cdot r$.
HOUSSELLE: Für *Betonbögen*:
$d_c = 0{,}2 + 0{,}025 \cdot r$, wenn $h < 1{,}50$ m
$d_c = 0{,}25 + 0{,}030 \cdot r$, - $h > 1{,}50$ m.

3. TOLKMITT[91], über dessen Verfahren zur angenäherten Berechnung der Gewölbe unter **2,** b S. 9—10 die Rede war, gibt zwei Werte von d_c an, *von denen der größere maßgebend ist.*

$$d_c = 0{,}15 \frac{l^2}{f} \left(\frac{h + q/2 + f/10}{\sigma_c - 0{,}15\, l^2/f} \right),$$

$$d_c \geqq \sqrt{k^2 + 0{,}49 f} - k,$$

worin

$$k = h/2 + q/4 + f/20$$

ist. Außerdem bedeuten darin

h: *Schütthöhe* über dem Gewölbescheitel,

q: *Verkehrslasthöhe* in Metern über der wagerecht abgeglichenen *Belastungslinie* ausgedrückt durch den Gewölbebaustoff (**33**, a),

σ_s: *Gleichmäßig* über den Scheitelquerschnitt verteilte *Druckspannung*, die höchstens zu $^2/_3$ der größten im Gewölbe überhaupt vorkommenden Druckspannung einzusetzen ist, ausgedrückt in cbm/qm. Der Umrechnung von σ_s in cbm/qm kann das *Raumgewicht* p des Gewölbebaustoffes zugrunde gelegt werden.

4. *Verfassers Näherungsformel* steht auf S. 13. Weitere Formeln findet man bei KÖGLER im Taschenbuch für Bauingenieure, S. 986—987, und im Anhange der 2. Hälfte dieses Bandes *bei der Berechnung des Gewölbes als statisch unbestimmtes System.*

---

[91] Leitfaden für das Entwerfen und Berechnen gewölbter Brücken. Berlin 1902.

c. Zulässige Druckspannungen in Scheitel- und Kämpfergelenken aus Eisen und Stein. Nach meiner Ansicht empfehlen sich solche Gelenke nur in besonderen Fällen, namentlich bei unsicherem Erduntergrunde. Für *eiserne Wälzgelenke* rechnet man heute, je nach ihrer Art und Güte einen *zulässigen Stauchdruck* bis zur Elastizitätsgrenze und darüber[92]. Für *Stein und Beton* geht man mindestens bis zur halben Druckfestigkeit.

35. **Abmessungen von einfachen Stützmauern.** Den Angaben liegen folgende Voraussetzungen zugrunde:

1. Der Stützpunkt der wagerechten Sohle liegt im vorderen Kernpunkte.

2. Die Erdlinie ist in Kronenhöhe wagerecht abgeglichen und der Winkel φ der natürlichen Böschung beträgt 33°.

Es bedeuten: F den Mauerquerschnitt, β den Winkel der Mittelkraftlinie mit der Lotrechten im Stützpunkte.
σ den Bodendruck in atm am Rande der Sohle.
γ_e das Gewicht von 1 cbm Erde in kg.
γ_m - - - 1 - Mauerwerk in kg.
γ_w - - - 1 - Wasser in kg.

Tabelle 3. Für $\varphi = 33°$.

Nr.	Querschnitt	$\gamma_e = \gamma_m$				$\gamma_e = 0{,}8\,\gamma_m$			
		$\frac{b}{h}$	$\frac{F}{h^2}$	β	$\frac{\sigma}{\gamma_m h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F}{h^2}$	β	$\frac{\sigma}{\gamma_m h}$
1		0,350	0,350	14° 51′	2,42	0,320	0,320	13° 20′	2,36
2		0,327	0,277	17° 48′	2,14	0,300	0,250	16° 17′	2,05
3		0,340	0,240	19° 45′	1,84	0,310	0,210	16° 39′	1,73
4		0,307	{0,203 0,222	10° 43′	1,91	0,287	{0,183 0,198	8°—	1,80
5		0,252	0,202	21° 12′	2,00	0,226	0,176	17° 47′	2,14
6		0,238	{0,188 0,199	10° 52′	2,12	0,215	{0,165 0,174	9° 22′	2,02
7		0,472	0,372	15°—	2,10	0,456	0,356	13° 10′	2,01

[92] In den Wettbewerbsbedingungen für den Bau der Kölner Rheinstraßenbrücke (Der Eisenbau, Oktoberheft 1911, S. 408 und 426) wurde für *Stahlguß*teile, die im unbelasteten Zustande sich nur in einer Linie oder nur in einem Punkte berühren, ein Stauchdruck von 6,5 t zugelassen.

36. Größe des Erddruckes bei verschiedenen Hinterfüllungsarten und lotrechter Wandlinie[93].

Tabelle 4.

Nr.	*Beschaffenheit der Hinterfüllung*			*Annahmen*		Winkel der *Gleitfläche* zur Wagerechten	*Größe des Erddruckes E* bei lotrechter Wandlinie	
	Erdart	Böschungswinkel φ Grad	Raumgewicht γ_e kg	über die Erdlinie	über den Reibungswinkel φ_1	Grad	E in kg $= k\gamma_e h^2/2 = ih^2$ k	i
1	*Dammerde* trocken	40	1400	wagerecht	$\varphi_1 = 0$	65,0	0,217	152
				Parallel zur Böschungsl.	$\varphi_1 = \varphi$	60,0	0,211	148
2	dgl. etwas feucht	45	1580	wagerecht	$\varphi_1 = 0$	67,5	0,172	136
				Parallel zur Böschungsl.	$\varphi_1 = \varphi$	63,5	0,177	140
3	dgl. gesättigt naß	27	1800	wagerecht	$\varphi_1 = 0$	58,5	0,376	338
				Parallel zur Böschungsl.	$\varphi_1 = \varphi$	53,0	0,331	298
4	*Sand* trocken	35	1640	wagerecht	$\varphi_1 = 0$	62,5	0,271	222
				Parallel zur Böschungsl.	$\varphi_1 = \varphi$	57,0	0,250	205
5	dgl. etwas feucht	40	1770	wagerecht	$\varphi_1 = 0$	65,0	0,217	192
				Parallel zur Böschungsl.	$\varphi_1 = \varphi$	60,0	0,211	187
6	dgl. gesättigt naß	24	2000	wagerecht	$\varphi_1 = 0$	57,0	0,422	422
				Parallel zur Böschungsl.	$\varphi_1 = \varphi$	50,5	0,370	370
7	*Gerölle* eckig	45	1770	wagerecht	$\varphi_1 = 0$	67,5	0,172	152
				Parallel zur Böschungsl.	$\varphi_1 = \varphi$	63,5	0,177	157
8	dgl rundlich	30	1770	wagerecht	$\varphi_1 = 0$	60,0	0,333	295
				Parallel zur Böschungsl.	$\varphi_1 = \varphi$	54,0	0,297	263
9	*Lehm* wassergesättigt	17	2040	wagerecht	$\varphi_1 = 0$	53,5	0,548	559
				Parallel zur Böschungsl.	$\varphi_1 = \varphi$	46,5	0,480	490

Daß der Erddruck mit wachsendem φ nicht immer zunimmt, sieht man aus Nr. 2 und 7.

[93] MÖLLER, Erddruck-Tabellen mit Erläuterungen über Erddruck und Verankerungen, 1902, S. 49.

